Лекции по Анализу-I

А.А.Кулешов

Курс лекций подготовлен при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Оглавление

I	Первый семестр

1 Вещественные числа 6
1.1 Определение множества вещественных чисел и правила их сравнения 6
1.2 О приближении вещественных чисел рациональными 10
1.3 Ограниченные числовые множества 11
1.4 Арифметические операции над вещественными числами и основные их свойства 13

2 Предел числовой последовательности 19
2.1 Сходящиеся последовательности и их основные свойства 19
2.2 Теорема Штольца 22

3 Предел и непрерывность функции одной переменной 26
3.1 Определение предела функции по Коши и по Гейне, основные свойства предела 26
3.2 Непрерывность функции в точке и на некотором множестве. Основные свойства непрерывных функций 30
3.3 Монотонная функция. Обратная функция 32
3.4 Классификация точек разрыва. О точках разрыва монотонной функции 36
3.5 Простейшие элементарные функции 37
3.5.1 Показательная, логарифмическая и степенная функции 37
3.5.2 Об углах, их мере и тригонометрических функциях 38
3.5.3 Обратные тригонометрические функции 43
3.6 Определение и основные свойства о-малых 43
3.7 Два замечательных предела 45
3.8 Асимтотические представления некоторых элементарных функций 47
3.9 Равномерная непрерывность 50

4 Дифференцируемость функции одной переменной 53
4.1 Основные определения и свойства 53
4.2 Производные высших порядков 57
4.3 Основные теоремы о дифференцируемых функциях 60
4.4 О производных простейшей неявно заданной функций 66
4.5 Формула Тейлора 68
4.6 О выпуклых функциях 71

5 Первообразная 78

Библиография 82

Предметный указатель 83

Список обозначений 84

Первый семестр

1. Вещественные числа

1.1 Определение множества вещественных чисел и правила их сравнения

Пусть $\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ — *несократимая дробь*. Класс $r := \left\{ \frac{pn}{qn} : n \in \mathbb{N} \right\}$ будем называть *рациональным числом*, множество всех рациональных чисел будем обозначать символом $\mathbb{Q}$. Из школьного курса известны определения *отношения порядка* $\leqslant$, арифметических операций сложения $(+) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ и умножения $(\cdot) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, а также основные свойства: существуют *различные* элементы $0, 1 \in \mathbb{Q}$ такие, что для любых $a, b, c \in \mathbb{Q}$ выполнено:

1. a+b=b+a (*коммутативность* сложения).
2. (a+b)+c=a+(b+c) (*ассоциативность* сложения).
3. a+0=a.
4. $\exists -a \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$.
5. ab=ba (*коммутативность* умножения).
6. (ab)c=a(bc) (*ассоциативность* умножения).
7. $a \cdot 1$=a.
8. Если $a \neq 0$, то $\exists a^{-1} \in \mathbb{Q} : aa^{-1} = 1$.
9. (a+b)c=ac+bc. (*дистрибутивность* умножения относительно сложения).
10. $a \leqslant a$.
11. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$.
12. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ (*транзитивность*).
13. Одно из соотношений $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ всегда имеет место.
14. Если $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$.
15. Если $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$, то $0 \leqslant ab$.
16. Существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ штук}} = n > a$ (*принцип Архимеда*).

При этом соотношение $a < b$ означает, что $a \leqslant b$ и $a \neq b$, а запись $a > b$ ($a \geqslant b$) по определению означает, что $b < a$ ($b \leqslant a$).

> ***Замечание 1.*** Отметим, что введённые выше условия 1-9 определяют на множестве $\mathbb{Q}$ структуру **поля**, условия 10-13 — структуру **линейно упорядоченного множества**, а все вместе условия 1-15 — структуру **упорядоченного поля**. Упорядоченное поле, в котором выполнено свойство 16 (принцип Архимеда), называется **архимедовым упорядоченным полем**.

Далее рассмотрим множество $\widehat{\mathbb{R}}$, состоящее из всевозможных *бесконечных десятичных дробей* вида $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где $\alpha_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha_i \in \overline{0,9}$ при всех $i \in \mathbb{N}$ (знак +, как правило, будем опускать). Из школьного курса известно, что каждому рациональному числу r с помощью алгоритма деления в столбик можно однозначно поставить в соответствие *бесконечную десятичную дробь*, причём полученная дробь всегда будет *периодической*, например $-\dfrac{1}{6} = -0,1(6)$, $\dfrac{1}{7} = 0,(142857)$, где в круглые скобки взят соответствующий период. Если десятичная дробь $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ имеет вид $\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k(0)$, то мы будем называть её *конечной* и сокращённо писать $a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$, автоматически подразумевая, что дальше идёт бесконечная последовательность нулей. Известно, например, что для рациональных чисел вида $\dfrac{p}{2^s5^l}$ (и только для них, если дробь *несократимая*) деление в столбик порождает конечную десятичную дробь. Тут возникает *основная трудность рассмотрения чисел как бесконечных десятичных дробей*: десятичные дроби вида $\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k(0)$, где $\alpha_k \geqslant 1$, и $\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots(\alpha_k-1)(9)$ определяют одно и то же число (предположив, что эти числа различны, нам не удастся вставить между ними никакое число, отличное от них обоих, что противоречит интуиции и невозможно в архимедовых полях). Эта ситуация вполне аналогична той, которая вынуждает нас отождествлять рациональные числа $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{2}{4}$. В связи с этим дадим следующее естественное определение.

Определение 1. Десятичные дроби $a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in \widehat{\mathbb{R}}$ и $b = \pm\beta_0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots \in \widehat{\mathbb{R}}$ будем называть **эквивалентными** либо если $\alpha_k = \beta_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}^+$, либо если они одного знака и $\alpha_k = \beta_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}^+$, либо если a и b суть различные десятичные представления одного и того же числа, в одном из которых содержится период 0, а в другом — период 9. Обозначение $a \sim b$.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что $a \sim a$, из $a \sim b$ следует $b \sim a$, а из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$, то есть введённое в определении 1 отношение $\sim$ действительно является *отношением эквивалентности*.

Таким образом, мы подошли к основному определению.

Определение 2. **Вещественным числом**, соответствующим десятичной дроби $a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in \widehat{\mathbb{R}}$, будем называть множество $x := \{b \in \widehat{\mathbb{R}} : a \sim b\}$ (см. определение 1). При этом будем использовать запись $x = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ вместо $\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in x$ (понимая, что эта условная запись *не есть равенство двух объектов в теоретико-множественном смысле*). Дробь a будем называть **десятичным представлением** числа x. Множество всех вещественных чисел будем обозначать символом $\mathbb{R}$.

Замечание 3. Согласно определениям 1 и 2 у каждого вещественного числа существует либо одно (например $x = 0,121122111222\ldots$), либо два *эквивалентных десятичных представления* (например $x = 0,1$ и $x = 0,0999\ldots$).

Замечание 4. Как отмечалось выше, каждому рациональному числу $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ по алгоритму деления в столбик ставится в соответствие некоторая десятичная дробь $a \in \widehat{\mathbb{R}}$, а ей по определению 2 ставится в соответствие вещественное число $x \in \mathbb{R}$. В этом случае наряду с записью $x = a$ будем также пользоваться записью $x = \dfrac{p}{q}$. Также отметим, что мы построили некоторое отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Определение 3 [Упорядочение множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел]. Для любых двух *десятичных дробей* $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$ со знаком $+$ вида $a = +\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $b = +\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ положим $a < b$ тогда и только тогда, когда существует номер $k \in \mathbb{Z}^+$ такой, что $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i \in \overline{0, k-1}$ и $\alpha_k < \beta_k$.

Пусть числа $x, y \in \mathbb{R}$ имеют десятичные представления $x = a$, $y = b$ со знаком $+$. Положим $x \leqslant y$, тогда и только тогда, когда выполнено либо $x = y$, либо $a < b$.

Для любых чисел $x = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ и $y = -\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ положим $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $\widehat{y} \leqslant \widehat{x}$, где $\widehat{x} := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $\widehat{y} = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$.

Для любых чисел $x = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ и $y = +\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ положим $x \leqslant y$; также положим $y \leqslant x$ в одном единственном случае $x = -0$, $y = +0$.

Во всех остальных случаях, кроме рассмотренных, соотношение $x \leqslant y$ по определению не выполнено.

Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ положим $x < y$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$ и $x \neq y$, также положим $x > y$ $(x \geqslant y)$ тогда и только тогда, когда $y < x$ $(y \leqslant x)$.

Из определения 3 вытекает, что для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Также нетрудно убедиться в независимости данного определения от того, какие из возможных десятичных представлений a, b для чисел x, y были использованы. Достаточно показать это для случая $x \leqslant y$, где $x = +\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $y = +\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$.

Лемма 1. Для любых десятичных дробей $a, b, \widetilde{b}$ вида $a = +\alpha_0, \alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots$, $b = +\beta_0, \beta_1\ldots\beta_{m-1}\beta_m 000\ldots$, $\widetilde{b} = \beta_0, \beta_1\ldots\beta_{m-1}(\beta_m - 1)999\ldots$ таких, что $b, \widetilde{b} \neq a$ имеем:

(а) $a < b \Leftrightarrow a < \widetilde{b}$;

(б) $b < a \Leftrightarrow \widetilde{b} < a$.

Доказательство. Докажем утверждение (а), утверждение (б) доказывается аналогично.

$\Rightarrow$: Обозначим через k первый из номеров, в котором дроби a и b различаются. Если $k \leqslant m-1$, то мы автоматически получаем $a < \widetilde{b}$. Пусть $k = m$, тогда $\alpha_m \leqslant \beta_m - 1$. Если $\alpha_m < \beta_m - 1$, то снова получаем $a < \widetilde{b}$. Если $\alpha_m = \beta_m - 1$, то среди десятичных знаков $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}\ldots$ найдётся отличный от 9, так как по условию леммы $a \neq \widetilde{b}$. Снова получили $a < \widetilde{b}$. Случай $k \geqslant m+1$ невозможен, так как тогда мы имели бы $\alpha_k < 0$.

$\Leftarrow$: Обозначим через k первый из номеров, в котором дроби a и $\widetilde{b}$ различаются. Если $k \leqslant m-1$, то мы автоматически получаем $a < b$. Если $k \geqslant m$, то мы имеем $\alpha_0 = \beta_0, \ldots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$ и $\alpha_m \leqslant \beta_m - 1 < \beta_m$, что по определению означает $a < b$. ◀

Далее по определению 3 элементарно проверяется выполнение для любых $a, b \in \mathbb{R}$ свойств 10, 11 и 13. Проверим свойство 12 транзитивности.

Лемма 2 [О транзитивности отношения неравенства на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел]. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$ и $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, тогда $x \leqslant z$.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in \widehat{\mathbb{R}}$ и $x = a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $y = b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$, $z = c = \pm\gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$. Рассмотрим возможные случаи:
1^0 : a имеет знак $+$;
2^0 : a имеет знак $-$, c имеет знак $+$;
3^0 : a и c имеют знак $-$.

1^0. По определению 3 из того, что b имеет знак $-$ вытекает, что $a = +0$, $b = -0$, а значит $x = y \leqslant z$. Если b имеет знак $+$, а c имеет знак $-$, совершенно аналогично получим, что $x \leqslant y = z = 0$. Теперь рассмотреть случай, когда дроби a, b, c имеют знак $+$. В случае, если либо $x = y$, либо $y = z$ утверждение, конечно же, выполняется. Осталось рассмотреть случай, в котором по определению 3 найдутся номера $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ такие, что $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i \in \overline{0, k_1 - 1}$ и $\alpha_{k_1} < \beta_{k_1}$; $\beta_i = \gamma_i$ для всех $i \in \overline{0, k_2 - 1}$ и $\beta_{k_2} < \gamma_{k_2}$. Полагая $k := \min\{k_1, k_2\}$, получим $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$ для всех $i \in \overline{0, k - 1}$ и либо $\alpha_k = \beta_k < \gamma_k$, либо $\alpha_k < \beta_k = \gamma_k$, либо $\alpha_k < \beta_k < \gamma_k$. Во всех трёх случаях имеем $\alpha_k < \gamma_k$, что и означает $x \leqslant z$.

2^0. В этом случае $x \leqslant z$ по определению 3.

3^0. По определению 3 из того, что b имеет знак $+$ вытекает, что $b = +0$, $c = -0$, а значит $x \leqslant y = z = 0$. По тому же определению в случае, когда b имеет знак $-$, имеем $\widehat{y} := \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots \leqslant \widehat{x} := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ и $\widehat{z} := \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots \leqslant \widehat{y}$, отсюда по пункту 1^0 получаем $\widehat{z} \leqslant \widehat{x}$, что и означает $x \leqslant z$ по определению 3. ◀

Замечание 5. Выше в замечании 4 было определено отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим множество $\mathbb{Q}' := \varphi(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$. Из алгоритма деления в столбик вытекает, что

$$r_1 < r_2 \Rightarrow \varphi(r_1) < \varphi(r_2)$$

для всех $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Из этого следует, что функция φ — это *биекция*, отображающая множество $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Q}'$. Далее определим на множестве $\mathbb{Q}'$ арифметические операции $+, -, \cdot, / : \mathbb{Q}' \times \mathbb{Q}' \to \mathbb{Q}'$ естественным образом: для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}'$ положим $x_1 \pm x_2 := \varphi\big(\varphi^{-1}(x_1) \pm \varphi^{-1}(x_2)\big)$, $x_1x_2 := \varphi\big(\varphi^{-1}(x_1)\varphi^{-1}(x_2)\big)$, $x_1/x_2 := \varphi\big(\varphi^{-1}(x_1)/\varphi^{-1}(x_2)\big)$ (операция деления, конечно же, определяется при $x_2 \neq 0$). Отметим, что достаточно было бы определить только операции сложения и умножения, а вычитание и деление определить как обратные к ним, результат был бы тем же самым. Множество $\mathbb{Q}'$ с определёнными выше арифметическими операциями $(+, \cdot)$ обретает структуру *упорядоченного поля* (см. условия 1-15), а функция φ является **изоморфизмом упорядоченных полей** $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}'$ $\big($то есть для всех $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ выполнено: $\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$, $\varphi(r_1r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)$ и $r_1 < r_2 \Rightarrow \varphi(r_1) < \varphi(r_2)\big)$. В дальнейшем мы будем *отождествлять* множество $\mathbb{Q}'$ со множеством $\mathbb{Q}$ (посредством изоморфизма φ), а его элементы называть просто **рациональными** числами, однако при использовании неравенств и арифметических операций всё же приходится различать, в качестве элемента какого из этих двух множеств рассматривается то или иное рациональное число в каждой конкретной формуле. Совершенно аналогично множества $\varphi(\mathbb{Z})$ и $\varphi(\mathbb{N})$ будем называть соответственно множествами **целых и натуральных** чисел.

Далее убедимся в том, что для вещественных чисел выполнено свойство 16 (принцип Архимеда).

Лемма 3 [Принцип Архимеда для вещественных чисел]. Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ штук}} = n > a$.

Доказательство. В случае $a < 0$ утверждение леммы выполнено при $n := 1$, в случае $0 \leqslant a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ — при $n := \alpha_0 + 2$. ◀

1.2 О приближении вещественных чисел рациональными

Лемма 1. Для любого числа $a \in \mathbb{R}$ и любого рационального числа $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдутся числа $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ (рассмотренные как вещественные) такие, что $q_1 \leqslant a \leqslant q_2$ и $q_2 - q_1 < \varepsilon$ (знак "$-$" здесь понимается как *разность рациональных дробей*).

Доказательство. Пусть $0 \leqslant a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$. По определению 1.3 устанавливается справедливость неравенств $q_1 := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \leqslant a$ и $a \leqslant \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n} =: q_2$ (знак "$+$" здесь понимается как *сумма рациональных дробей*).

Итак, для любого номера n нашлись два рациональных числа q_1 и q_2 такие, что $q_1 \leqslant a \leqslant q_2$ и $q_2 - q_1 = 10^{-n}$. Убедимся, что для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдётся номер n такой, что $10^{-n} < \varepsilon$.

Согласно свойству 16 рациональных чисел (принцип Архимеда) найдётся лишь конечное число натуральных чисел, не превосходящих числа $1/\varepsilon$. Значит, лишь для конечного числа номеров n справедливо неравенство $10^n \leqslant 1/\varepsilon$. Для всех остальных номеров n верно противоположное неравенство $10^{-n} < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ◀

Лемма 2. Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ таких, что $a < b$, найдётся число $q \in \mathbb{Q}$ (рассмотренное как вещественное) такое, что $a < q < b$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ (случай, когда $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$ сводится к первому посредством перехода к модулям, а случай, когда $b < 0$, $a > 0$ тривиален — достаточно положить $q := 0$).

Итак, пусть $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$ и $a < b$. Рассмотрим то из двух возможных десятичных представлений числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, в котором отсутствует период (9), а также десятичное представление числа $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$. По определению 1.3 найдётся номер $k \in \mathbb{Z}^+$ такой, что $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\ldots$, $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, $\alpha_k < \beta_k$. При $n \geqslant k + 1$ не все десятичные знаки $\alpha_n = 9$, поэтому найдётся $p := \min\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant k+1, \alpha_n \neq 9\}$. Тогда $a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k 9 \ldots 9 \alpha_p \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \ldots$, где $\alpha_p \leqslant 8$, причём среди десятичных знаков $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots$ найдётся отличный от 9. По определению 1.3 проверяется, что число $q := \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k 9 \ldots 9(\alpha_p + 1)00 \ldots \in \mathbb{Q}$, удовлетворяет неравенствам $a < q < b$. Лемма доказана.

◀

Лемма 3. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдутся числа $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ (рассмотренные как вещественные) такие, что $q_1 \leqslant x_1 \leqslant q_2$, $q_1 \leqslant x_2 \leqslant q_2$, $q_2 - q_1 < \varepsilon$. Тогда $x_1 = x_2$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $x_1 \neq x_2$. Не нарушая общности, будем считать, что $x_1 < x_2$. В силу леммы 2 найдутся $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $x_1 < p_1 < p_2 < x_2$.

Возьмём произвольные числа $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющие неравенствам $q_1 \leqslant x_1 \leqslant q_2$, $q_1 \leqslant x_2 \leqslant q_2$. В силу свойств 11 и 12 (см. лемму 1.3) для вещественных чисел получим $q_1 < p_1 < p_2 < q_2$. Но тогда $q_2 - q_1 > p_2 - p_1 \in \mathbb{Q}$, что противоречит условию $q_2 - q_1 < \varepsilon$ для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$. Лемма доказана. ◀

1.3 Ограниченные числовые множества

Определение 1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если существует $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) такое, что $x \leqslant M$ ($x \geqslant m$) для всех $x \in \Omega$. При этом число M (m) называется **верхней (нижней) границей** множества Ω.

Множество Ω называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу.

Замечание 1. Любое ограниченное сверху (снизу) множество $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}$ имеет бесконечно много верхних (нижних) границ.

Определение 2. Минимальная из всех верхних границ ограниченного сверху множества Ω называется **точной верхней границей** (или **верхней гранью**, или **супремумом**) этого множества и обозначается символом $\sup\Omega$ или Ω^*. Если $\sup\Omega \in \Omega$, то супремум называется **максимумом** и обозначается $\max\Omega$.

Максимальная из всех нижних границ ограниченного снизу множества Ω называется **точной нижней границей** (или **нижней гранью**, или **инфимумом**) этого множества и обозначается символом $\inf\Omega$ или Ω_*. Если $\inf\Omega \in \Omega$, то инфимум называется **минимумом** и обозначается $\min\Omega$.

Определение 2 допускает эквивалентную формулировку.

Определение 3. Число Ω^* (Ω_*) называется **верхней** (**нижней**) гранью ограниченного сверху (снизу) множества Ω, если

(1) $\forall x \in \Omega \; x \leqslant \Omega^*$ ($x \geqslant \Omega_*$);

(2) $\forall x' < \Omega^*$ ($\forall x' > \Omega_*$) $\exists x \in \Omega : x > x'$ ($x < x'$) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in \Omega : x > \Omega^* - \varepsilon$ ($x < \Omega_* + \varepsilon$).

Теорема 1 о существовании точных границ. Если множество $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу), то у него существует верхняя (нижняя) грань.

Доказательство. Пусть множество $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то есть $\exists M \in \mathbb{R}:$ $x \leqslant M$ для всех $x \in \Omega$. Рассмотрим два возможных случая:

1^0 : среди элементов множества Ω есть *хотя бы одно* неотрицательное число;

2^0 : *все элементы* множества Ω являются отрицательными числами.

1^0. Рассмотрим только неотрицательные числа множества Ω. Представив каждое из этих чисел в виде бесконечной десятичной дроби, рассмотрим целые части этих десятичных дробей. В силу определения 1.3 все целые части (любого из двух возможных представлений) элементов множества Ω не превосходят некоторого числа $N \in \mathbb{Z}^+$, а значит среди них найдётся *максимальная целая часть*, обозначим её через $\overline{x}_0$. Выделим из множества Ω подмножество $\Omega_1 \subset \Omega$ тех неотрицательных чисел, у которых хотя бы у одного из двух возможных представлений целая часть равна $\overline{x}_0$. У чисел множества Ω_1 рассмотрим первые десятичные знаки после запятой. Максимальный из этих знаков обозначим через $\overline{x}_1$. Выделим из множества Ω_1 подмножество $\Omega_2 \subset \Omega_1$ тех чисел, у которых хотя бы у одного из двух возможных представлений первый десятичный знак равен $\overline{x}_1$. Действуя аналогично, мы последовательно определим все знаки десятичного представления некоторого числа $\overline{x} \in \mathbb{R}$: $\overline{x} = \overline{x}_0, \overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n \ldots$. Пользуясь определением 3, покажем, что $\overline{x} = \sup \Omega$.

Так как по построению число $\overline{x}$ является неотрицательным, то неравенство $x \leqslant \overline{x}$ выполнено для любого отрицательного элемента $x \in \Omega$. Покажем, что любой неотрицательный элемент $x \in \Omega$ удовлетворяет условию $x \leqslant \overline{x}$. Предположим, что это не так: пусть существует $\mathbf{x} \in \Omega : 0 \leqslant x = x_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$, не удовлетворяющий неравенству $x \leqslant \overline{x}$. Тогда $x > \overline{x}$ и по определению 1.3 найдётся номер k такой, что $x_0 = \overline{x}_0$, $x_1 = \overline{x}_1, \ldots, x_{k-1} = \overline{x}_{k-1}$, $x_k > \overline{x}_k$. Но последние соотношения противоречат тому, что в качестве $\overline{x}_k$ берётся *максимальный* из x_k - элементов десятичных представлений чисел из множества Ω, у которых первые элементы некоторого десятичного представления соответственно равны $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{k-1}$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения (1) определения 3.

Покажем, что выполнено условие (2) определения 3. Возьмём любое $x' : x' < \overline{x}$. Если $x' < 0$, то неравенству $x > x'$ удовлетворяет любой неотрицательный элемент $x \in \Omega$ (по предположению хотя бы один такой элемент существует).

Рассмотрим теперь случай $x' \geqslant 0$. Пусть $x' = x'_0, x'_1 \ldots x'_n \ldots$. Из условия $x' < \overline{x}$ и определения 1.3 следует, что найдётся номер m такой, что

$$x'_0 = \overline{x}_0,\ x'_1 = \overline{x}_1, \ldots, x'_{m-1} = \overline{x}_{m-1},\ x'_m < \overline{x}_m. \tag{1}$$

С другой стороны, из построения числа $\overline{x}$ вытекает, что для любого номера m найдётся элемент $x = x_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots \in \Omega$ такой, для которого

$$x_0 = \overline{x}_0,\ x_1 = \overline{x}_1, \ldots, x_{m-1} = \overline{x}_{m-1},\ x_m = \overline{x}_m. \tag{2}$$

Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$x_0 = x'_0,\ x_1 = x'_1, \ldots, x_{m-1} = x'_{m-1},\ x_m > x'_m.$$

В силу определения 1.3 это означает, что $x > x'$, а значит условие (2) определения 3 выполнено, и теорема для случая 1^0 доказана.

2^0. Представим все элементы x отрицательными бесконечными десятичными дробями и обозначим через x_0 минимальную из целых частей этих дробей, через $\overline{x}_1$ — минимальный из первых десятичных знаков тех дробей, целая часть которых равна $\overline{x}_0$, через $\overline{x}_2$ — минимальный из вторых десятичных знаков тех дробей, целая часть и первый десятичный знак которых соответственно равны $\overline{x}_0$ и $\overline{x}_1$ и т.д. Таким образом мы определим неположительное число $\overline{x} = -\overline{x}_0, \overline{x}_1\overline{x}_2 \dots \overline{x}_n \dots$. Аналогично случаю 1^0 доказывается, что $\overline{x} = \sup \Omega$. ◀

1.4 Арифметические операции над вещественными числами и основные их свойства

Определение 1. **Суммой** чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ называется такое число $x \in \mathbb{R}$, которое для любых чисел p_1, p_2, q_1, $q_2 \in \mathbb{Q}$ (рассмотренных как вещественные), удовлетворяющих соотношениям $p_1 \leqslant a \leqslant p_2$, $q_1 \leqslant b \leqslant q_2$, удовлетворяет неравенствам $p_1 + q_1 \leqslant x \leqslant p_2 + q_2$. Сумму чисел a и b обозначают символом $a + b$.

Теорема 1 [Существование суммы вещественных чисел]. Для любых чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ существует число $x \in \mathbb{R}$, являющееся их суммой.

Доказательство. Фиксируем произвольные числа $p_2, q_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $a \leqslant p_2$, $b \leqslant q_2$ (их существование вытекает из принципа Архимеда). Рассмотрим всевозможные числа $p_1, q_1 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющие неравенствам $p_1 \leqslant a$, $q_1 \leqslant b$. Существование таких чисел снова вытекает из принципа Архимеда: в качестве p_1, например, можно взять число $-p_1'$, где $\mathbb{Q} \ni p_1' > -a$ (в качестве $-a$ здесь имеется в виду число a, взятое с противоположным знаком). Проверим, что множество $\{p_1 + q_1\}$ всевозможных их сумм ограничено сверху.

В силу свойства 12 транзитивности отношения $\leqslant$ (см. лемму 1.3) из неравенств $p_1 \leqslant a$ и $a \leqslant p_2$ следует, что $p_1 \leqslant p_2$, а из неравенств $q_1 \leqslant b$ и $b \leqslant q_2$ следует, что $q_1 \leqslant q_2$. Складывая полученные неравенства почленно, имеем $p_1 + q_1 \leqslant p_2 + q_2$. Последнее неравенство означает ограниченность непустого множества $\{p_1 + q_1\}$ сверху и тот факт, что число $p_2 + q_2$ является одной из верхних границ этого множества.

По теореме 3.1 существует $\sup\{p_1 + q_1\} =: x$. Осталось убедиться, что $x = a + b$, то есть что всегда выполнено $p_1 + q_1 \leqslant x \leqslant p_2 + q_2$. Справедливость левого неравенства следует из того, что x является верхней границей множества $\{p_1 + q_1\}$, а правого — из того, что число $p_2 + q_2$ является одной из верхних границ множества $\{p_1 + q_1\}$, а число x — *минимальная* из них (см. определение 3.2). Теорема доказана. ◀

Теорема 2 [Единственность суммы вещественных чисел]. Может существовать только одно число $x \in \mathbb{R}$, являющееся суммой двух данных чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и

$$\begin{cases} p_1 + q_1 \leqslant x_1 \leqslant p_2 + q_2, \\ p_1 + q_2 \leqslant x_2 \leqslant p_2 + q_2 \end{cases} \tag{1}$$

для всевозможных чисел $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенствам

$$p_1 \leqslant a \leqslant p_2, \qquad q_1 \leqslant b \leqslant q_2. \tag{2}$$

Фиксируем $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$. По лемме 2.1 для $\varepsilon/2$ и для $a \in \mathbb{R}$ найдутся числа $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $p_1 \leqslant a \leqslant p_2$, причем $p_2 - p_1 < \varepsilon/2$. Аналогично найдутся числа $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $q_1 \leqslant b \leqslant q_2$, причем $q_2 - q_1 < \varepsilon/2$. Взяв в (2) указанные p_1, p_2, q_1, q_2, получим, что x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам (1), которые можно переписать в виде $r_1 \leqslant x_1 \leqslant r_2$, $r_1 \leqslant x_2 \leqslant r_2$, где $r_1 := p_1 + q_1$, $r_2 := p_2 + q_2$.

Осталось заметить, что $r_2 - r_1 = (p_2 + q_2) - (p_1 + q_1) = (p_2 - p_1) + (q_2 - q_1) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. По лемме 2.3 имеем $x_1 = x_2$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

> ***Замечание 1.*** Вместо числа x в теореме 1 можно также взять число $x' := \inf\{p_2 + q_2\}$, где $p_2, q_2 \in \mathbb{Q}$ — всевозможные числа, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant p_2$, $b \leqslant q_2$. Из теоремы 2 следует равенство $x = x'$.

Утверждение 1. Если числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ *рациональны*, то определение 1 их суммы равносильно определению суммы рациональных чисел, данному в замечании 1.5.

Доказательство. Для любых чисел p_1, p_2, q_1, $q_2 \in \mathbb{Q}$ (рассмотренных как вещественные), удовлетворяющих соотношениям $p_1 \leqslant a \leqslant p_2$, $q_1 \leqslant b \leqslant q_2$, получим выполнение этих соотношений для тех же чисел, рассмотренных как рациональные (см. замечание 1.5). Из свойств 12 и 14 рациональных чисел вытекает соотношение $p_1 + q_1 \leqslant a + b \leqslant p_2 + q_2$. Снова используя замечание 1.5 и рассматривая все числа, входящие в последнее двойное неравенство, как вещественные, получим для них справедливость того же соотношения. Это означает, что рациональное число $a + b$, рассмотренное как вещественное, является суммой чисел a и b по определению 1. В силу единственности этой суммы (см. теорему 2) мы получаем равносильность рассматриваемых определений. ◀

Отметим, что из справедливости свойств 1-4 для рациональных чисел и из определения 1 суммы вещественных чисел вытекает справедливость тех же свойств для вещественных чисел. Далее проверим свойство 14, то есть докажем, что если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$.

Если $a = b$, то утверждение очевидно. Если $a < b$, то по лемме 2.2 найдутся числа $q_1, p_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $a < p_2 < q_1 < b$. По лемме 2.1 для $0 < \varepsilon := q_1 - p_2 \in \mathbb{Q}$ числа $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $r_1 \leqslant c \leqslant r_2$ и $r_2 - r_1 < \varepsilon = q_1 - p_2$. Далее рассмотрим произвольные числа $p_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющие неравенствам $p_1 \leqslant a$, $b \leqslant q_2$. По определению 1 суммы вещественных чисел имеем

$$p_1 + r_1 \leqslant a + c \leqslant p_2 + r_2, \qquad q_1 + r_1 \leqslant b + c \leqslant q_2 + r_2.$$

Из неравенства $r_2 - r_1 < q_1 - p_2$ для рациональных чисел непосредственно вытекает неравенство $p_2 + r_2 \leqslant q_1 + r_1$. Рассмотрев теперь эти числа как вещественные и воспользовавшись свойством 12 транзитивности отношения $\leqslant$ на множестве вещественных чисел (см. лемму 1.3), окончательно получим $a + c \leqslant b + c$.

Определение 2. **Модулем** числа $a \in \mathbb{R}$ будем называть число

$$|a| := \begin{cases} a & \text{при } 0 \leqslant a, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Замечание 2. Из определения 2 модуля и свойства 14 заключаем, что $0 \leqslant |a|$ для всех $a \in \mathbb{R}$.

Определение 3. **Произведением** чисел $0 < a \in \mathbb{R}$ и $0 < b \in \mathbb{R}$ называется такое число $x \in \mathbb{R}$, которое для любых чисел p_1, p_2, q_1, $q_2 \in \mathbb{Q}$ (рассмотренных как вещественные), удовлетворяющих соотношениям $0 < p_1 \leqslant a \leqslant p_2$, $0 < q_1 \leqslant b \leqslant q_2$, удовлетворяет неравенствам $p_1q_1 \leqslant x \leqslant p_2q_2$. Произведение чисел a и b обозначают символом ab.
Для любого числа $a \in \mathbb{R}$ положим

$$a0 = 0a := 0.$$

Для любых чисел $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$ положим

$$ab := \begin{cases} |a||b|, & \text{если } 0 \text{ не лежит между } a \text{ и } b, \\ -|a||b|, & \text{если } 0 \text{ лежит между } a \text{ и } b. \end{cases}$$

Аналогично теоремам 1, 2 и утверждению 1 доказывается существование и единственность произведения любых двух вещественных чисел, а также тот факт, что для рациональных чисел определение 3 их произведения равносильно определению произведения, данному в замечании 1.5. Приведём формулировки соответствующих утверждений.

Теорема 1′ [Существование произведения вещественных чисел]. Для любых чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ существует число $x \in \mathbb{R}$, являющееся их произведением.

Теорема 2′ [Единственность произведения вещественных чисел]. Может существовать только одно число $x \in \mathbb{R}$, являющееся произведением двух данных чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$.

Утверждение 1′. Если числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ *рациональны*, то определение 3 их произведения равносильно определению произведения рациональных чисел, данному в замечании 1.5.

Далее убедимся в том, что для вещественных чисел выполнены все свойства 1-16 рациональных чисел.

Справедливость свойств 1-4, а также свойства 14, была установлена выше, справедливость свойств 10-13 и 16 была установлена ранее в параграфе 1.1.

Справедливость свойств 5-7, 9, 15 вытекает из определений 1 и 3 суммы и произведения вещественных чисел, а также из справедливости указанных свойств для рациональных чисел. Осталось проверить свойство 8.

Пусть $0 < a \in \mathbb{R}$. Показывается, что существует единственное число $a^{-1} \in \mathbb{R}$ такое, что для любых чисел $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $0 < p_1 \leqslant a \leqslant p_2$, выполнено $1/p_2 \leqslant a^{-1} \leqslant 1/p_1$ (при этом $a^{-1} = \sup\{1/p_2\}$). Затем показывается, что $aa^{-1} = 1$. В случае $0 > a \in \mathbb{R}$ положим $a^{-1} := -(-a)^{-1}$.

Далее для любых $a, b \in \mathbb{R}$ из свойств 1-4 выводится существование и единственность разности чисел a и b, то есть такого числа $c \in \mathbb{R}$, что $a = c + b$ $\big($при этом $c := a + (-b)\big)$. Разность чисел a и b обозначают символом $a - b$. В случае $b \neq 0$ из свойств 5-8 выводится существование и единственность частного чисел a и b, то есть такого числа $c \in \mathbb{R}$, что $a = cb$ (при этом $c := ab^{-1}$). Частное чисел a и b обозначают символом a/b.

Наличие свойств 1-16 означает, что множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с введёнными на нём арифметическими операциями (см. определения 1 и 3) и отношением $\leqslant$ (см. определение 1.3), также как и множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, имеет структуру *архимедова упорядоченного поля*. Но есть и принципиальное различие полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$, выраженное в том, что для $\mathbb{R}$ справедлива теорема 3.1 о существовании верхних и нижних граней у ограниченных множеств. Это свойство может быть также выражено в следующей форме.

Утверждение 2 [Аксиома полноты (непрерывности)]. Пусть $\varnothing \neq A, B \subset \mathbb{R}$ и для всех $a \in A$, $b \in B$ выполнено $a \leqslant b$. Тогда существует $\xi \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

Покажем, что аксиома полноты равносильна теореме о существовании верхних и нижних граней у ограниченных множеств.

Утверждение 3. Утверждение 2 $\Leftrightarrow$ теорема 3.1.

Доказательство.
$\Rightarrow$: Пусть непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Покажем, что существует $\sup A$ (существование нижней грани в случае, когда множество A ограничено снизу, устанавливается аналогично). Рассмотрим множество $B := \{x \in \mathbb{R} : \forall a \in A\ a \leqslant x\}$ всех верхних границ множества A. В силу ограниченности множества A сверху имеем $B \neq \varnothing$, поэтому в силу аксиомы полноты найдётся $\xi \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Покажем, что $\xi = \sup A$, то есть проверим выполнение условий (1) и (2) определения 3.3. Условие (1), очевидно, выполнено. Далее предположим, что условие (2) не выполнено, то есть что найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что такое, что $a \leqslant \xi - \varepsilon$ для всех $a \in A$. По определению множества B это означает, что $\xi - \varepsilon \in B$, а значит выполнено неравенство $\xi \leqslant \xi - \varepsilon$, из которого следует $\varepsilon \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает выполнение условия (2)
$\Leftarrow$: Пусть $\varnothing \neq A, B \subset \mathbb{R}$ и для всех $a \in A$, $b \in B$ выполнено $a \leqslant b$. Это означает, что непустое множество A ограничено сверху (а также то, что все элементы множества B являются верхними границами множества A), поэтому по теореме 3.1 существует $\sup A =: \xi$. Проверим, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Выполнение левого неравенства следует из того, что ξ является верхней границей множества A, а правого — из того, что ξ — минимальная из всех верхних границ (см. определение 3.2). ◀

> ***Замечание 3.*** Отметим, что теорема 3.1 (а следовательно и аксиома полноты) не выполнена для рациональных чисел: действительно, у ограниченного непустого множества

$\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ не существует рациональной верхней грани.

Множество со введёнными на нём арифметическими операциями и отношением порядка, обладающее свойствами 1-15, называется **полным упорядоченным полем**, если справедлива теорема 3.1 или, что равносильно, аксиома полноты (см. утверждение 3). При этом свойство 16 (принцип Архимеда) автоматически выполнено, то есть *любое полное упорядоченное поле является архимедовым.* Действительно, предположив, что принцип Архимеда не выполнен, мы получим ограниченность сверху множества $\mathbb{N}$. По теореме 3.1 существует $\sup \mathbb{N} =: s$. Так как $s - 1 < s$, то существует $n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > s - 1$. Но это означает, что $\mathbb{N} \ni n_0 + 1 > s$, что противоречит определению верхней грани.

Далее сформулируем теорему, доказательство которой можно найти, например, в [2, страница 636].

Теорема 3. Любые *полные упорядоченные поля* F_1 и F_2 *изоморфны*, то есть существует *биекция* $\varphi : F_1 \to F_2$ такая, что для всех $x_1, x_2 \in F_1$ выполнено: $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, $\varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ и $x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

Сформулированная теорема показывает, что вещественные числа вполне определяются (с точностью до изоморфизма) при помощи аксиом *полного упорядоченного поля.* Таким образом, определяя множество вещественных чисел как множество классов эквивалентности бесконечных двоичных (троичных, k-ичных) дробей или фундаментальных последовательностей рациональных чисел, или же как дедекиндовы сечения, или каким-либо ещё способом, достаточно убедиться лишь в выполнении условий 1-15 и в справедливости теоремы 3.1 о существовании верхних и нижних граней у ограниченных множеств.

В заключение сформулируем важное свойство вещественных чисел, называемое *неравенством треугольника* и определим некоторые часто используемые числовые множества.

Утверждение 4 [Неравенство треугольника для вещественных чисел]. Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{3}$$

Доказательство. Из свойств 12, 14 вещественных чисел и определения 2 модуля получим, что если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant x + y$, $|x| = x$, $|y| = y$, $|x + y| = x + y$ и в формуле (3) достигается равенство.

Если $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$, то $x + y \leqslant 0$, $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x + y| = -(x + y) \overset{\text{св-ва } 1,2}{=\!=\!=} -x - y$ и в формуле (3) достигается равенство.

Пусть, наконец, $x < 0 < y$ (случай $y < 0 < x$ рассматривается аналогично). Тогда либо $x < x + y \leqslant 0$, либо $0 \leqslant x + y < y$, По определению 2 модуля, используя свойство 14, в первом случае получим $|x + y| < |x|$, во втором $|x + y| < |y|$. В силу замечания 2 в обоих случаях получим $|x + y| < |x| + |y|$ и неравенство (3) установлено. ◀

Следствие 1 утверждения 4. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|.$$

Действительно, из неравенства (3) треугольника получим $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Меняя x и y местами, получим $-(|x| - |y|) \leqslant |x - y|$, отсюда и следует утверждение леммы. ◀

Определение 4. **Промежутком** будем называть любое из числовых множеств вида

1. $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ (**интервал**);
2. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$, где $-\infty < a \leqslant b < +\infty$ (**отрезок**);
3. $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$, где $-\infty \leqslant a \leqslant b < +\infty$ (**полуинтервал**);
4. $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, где $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$ (**полуинтервал**).

При этом в случае $a, b \in \mathbb{R}$ соответствующий промежуток называется **конечным**.

Определение 5. Точки промежутка I, отличные отличные от a и b, называются **внутренними**. Множество всех внутренних точек промежутка I обозначается $\operatorname{int}(I)$.

2. Предел числовой последовательности

2.1 Сходящиеся последовательности и их основные свойства

Определение 1. Пусть $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Множество $O_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ называется **δ-окрестностью** точки x_0. Множество $\mathring{O}_\delta(x_0) := O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ называется **проколотой δ-окрестностью** точки x_0.

Определение 2 предела последовательности. Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом последовательности** x_n, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ |x_n - a| < \varepsilon$, то есть

$$x_n \in O_\varepsilon(a)$$

для всех $n \geqslant N$. При этом употребляются обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$ или просто $x_n \to a$. Последовательности, которые имеют предел называются **сходящимися**, все остальные последовательности называются **расходящимися**.

Замечание 1. Часто используются модификации определения 2, в которых a может принимать значения, равные $-\infty$, $+\infty$ или ∞. Чтобы дать корректное определение предела последовательности в этих случаях, в определении 2 для точек такого вида нужно использовать следующие определения окрестностей (совпадающие с определениями их проколотых окрестностей): (проколотой) окрестностью точки $-\infty$, $+\infty$ или ∞ будем соответственно называть любое множество вида $O_\varepsilon(-\infty) = \mathring{O}_\varepsilon(-\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x < -\varepsilon\}$, $O_\varepsilon(+\infty) = \mathring{O}_\varepsilon(+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > \varepsilon\}$ или $O_\varepsilon(\infty) = \mathring{O}_\varepsilon(\infty) := \{x \in \mathbb{R} : |x| > \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Определение 3 ограниченной последовательности. Последовательность называетя **ограниченной (сверху, снизу)**, если множество её значений ограничено (сверху, снизу) (см. опредление 1.3.1).

Теорема 1 о предельном переходе в неравенстве. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$ и найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$x_n \leqslant y_n \tag{1}$$

для всех $n \geqslant N$. Тогда $a \leqslant b$.

Доказательство. Пусть $a > b$, тогда найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $z_1 > z_2$ для всех $z_1 \in O_\varepsilon(a)$, $z_2 \in O_\varepsilon(b)$. По определению 2 найдутся $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_n \in O_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $y_n \in O_\varepsilon(b)$ при всех $n \geqslant N_2$. Таким образом при $N_3 := \max\{N, N_1, N_2\}$ имеем $x_{N_3} > y_{N_3}$, что противоречит неравенству (1). ◀

Теорема 2 [Принцип двустороннего ограничения]. Пусть $x_n, z_n \to a$ и найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \tag{2}$$

для всех $n \geqslant N$. Тогда $y_n \to a$.

Доказательство. По определению 2 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_n \in O_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $z_n \in O_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_2$. В силу неравенств (2) это означает, что при $N_3 := \max\{N, N_1, N_2\}$ для всех $n \geqslant N_3$ выполнено $y_n \in O_\varepsilon(a)$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Определение 4 бесконечно малой последовательности. Последовательность α_n называется **бесконечно малой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Замечание 2. Из определения 2 вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ последовательность $\alpha_n := x_n - a$ является бесконечно малой.

Лемма 1 [Сумма и разность бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми]. Пусть $\alpha_n, \beta_n \to 0$, тогда $\alpha_n \pm \beta_n \to 0$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 2 найдём $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N_1$ и $|\beta_n| < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N_2$. В силу неравенства треугольника 1.4.4 это означает, что для всех $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ выполнено

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает $\alpha_n \pm \beta_n \to 0$ по определению 2. ◀

Лемма 2 [Любая бесконечно малая последовательность ограничена]. Если $\alpha_n \to 0$, то найдётся $M \in \mathbb{R} : |\alpha_n| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. По определению 2 при $\varepsilon := 1$ найдём $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|\alpha_n| < 1$ для всех $n \geqslant N$. Это означает, что $|\alpha_n| \leqslant M := \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{N-1}|, 1\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. ◀

Лемма 3 [Любая сходящаяся последовательность ограничена]. Если $x_n \to a \in \mathbb{R}$, то найдётся $M \in \mathbb{R} : |\alpha_n| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. По определению 2 последовательность $\alpha_n := x_n - a$ является бесконечно малой, а следовательно, ограниченной по лемме 2, то есть найдётся $M_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $|\alpha_n| \leqslant M_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу неравенства треугольника 1.4.4 для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|x_n| = |a + \alpha_n| \leqslant |a| + |\alpha_n| \leqslant |a| + M_1 =: M.$$

◀

Лемма 4 [Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую бесконечно мало]. Пусть $|x_n| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \to 0$. Тогда $x_n\alpha_n \to 0$.

Доказательство. Для дюбого $\varepsilon > 0$ по определению 2 найдём $N = N\left(\dfrac{\varepsilon}{M+1}\right) \in \mathbb{N}$

такое, что $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M+1}$ для всех $n \geqslant N$. Тогда

$$|x_n \alpha_n| = |x_n||\alpha_n| \leqslant \frac{M}{M+1}\varepsilon < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$, что и означает $x_n \alpha_n \to 0$. ◀

Лемма 5. Пусть $\alpha_n \to 0$ и $\alpha_n = c \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, тогда $c = 0$.

Доказательство. Если $c \neq 0$, то по определнию 2 найдётся $N = N(|c|/2) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_N| = |c| < \frac{|c|}{2},$$

отсюда $|c| < 0$ — противоречие. ◀

Утверждение 1 о единственности предела последовательности. Если $x_n \to a \in \mathbb{R}$ и $x_n \to a' \in \mathbb{R}$, то $a' = a$.

Доказательство. В силу замечания 2 имеем $x_n = a + \alpha_n = a' + \beta_n$, где $\alpha_n, \beta_n \to 0$. Это означает, что

$$c := a' - a = \alpha_n - \beta_n \overset{\text{л. } 1}{\to} 0,$$

поэтому $c = 0$ по лемме 5, а следовательно $a' = a$. ◀

Лемма 6. Пусть $y_n \to b \neq 0$, тогда найдутся числа $N \in \mathbb{N}$ и $M \in \mathbb{R}$ такие, что отношение $\dfrac{1}{y_n}$ корректно определено при всех $n \geqslant N$ и удовлетворяет неравенству $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| \leqslant M$.

Доказательство. По определению 2 найдётся $N = N(|b|/2) \in \mathbb{N}$ такое, что $|y_n - b| \leqslant |b|/2$ для всех $n \geqslant N$. В силу неравенства 1.4.4 треугольника имеем

$$|b| = |b - y_n + y_n| \leqslant |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|,$$

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}$$

и

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|} =: M$$

для всех $n \geqslant N$. ◀

> ***Теорема 3 об арифметических операциях над сходящимися последовательностями.*** Пусть $x_n \to a \in \mathbb{R}$, $y_n \to b \in \mathbb{R}$, тогда $x_n \pm y_n \to a \pm b$, $x_n y_n \to ab$, $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ (в случае, если $b \neq 0$).

Доказательство. В силу замечания 2 имеем $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n, \beta_n \to 0$. Так как

$$x_n \pm y_n = a \pm b + \alpha_n \pm \beta_n,$$

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n,$$

и $\alpha_n \pm \beta_n \to 0$, $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n \to 0$ в силу лемм 1, 2 и 4, то $x_n \pm y_n \to a \pm b$ и $x_n y_n \to ab$ в силу замечания 2.

Если $b \neq 0$, то по лемме 6 для некоторого $N \in \mathbb{N}$ при всех $n \geqslant N$ имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{1}{y_n}\frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right) \xrightarrow{\text{л. 1 и 4}} 0,$$

поэтому $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ в силу замечания 2. ◀

Утверждение 2 [О свойстве биномиальных коэффициентов]. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1,n}$ выполнено равенство

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \tag{3}$$

Теорема 4 о биноме Ньютона. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in N$. Тогда верна формула **бинома Ньютона**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \tag{4}$$

где C_n^k — *биномиальные коэффициенты* (см. определение **??**).

Доказательство. При $n = 1$ равенство (4) обращается в тождество $a + b = a + b$. Пусть оно верно для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Используя свойство (3) биномиальных коэффициентов, получим

$$(a+b)^{n+1} = a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \overset{\{m=k+1\}}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\{m=k+1\}}{=\!=\!=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^m + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \overset{(3)}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

Таким образом, формула (4) бинома Ньютона доказана по индукции. ◀

2.2 Теорема Штольца

Лемма 1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — наборы вещественных чисел, причём $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$. Пусть также $A < \dfrac{a_i}{b_i} < B$ для всех $i \in \overline{1,n}$. Тогда

$$A < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i} < B.$$

Доказательство. Умножая данные нам n неравенств на соответствующие $b_i > 0$, имеем $Ab_i < a_i < Bb_i$ для всех $i \in \overline{1,n}$, откуда вытекает

$$A\sum_{i=1}^{n} b_i < \sum_{i=1}^{n} a_i < B\sum_{i=1}^{n} b_i,$$

отсюда делением на $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i > 0$ получим утверждение леммы. ◀

Теорема 1 (Штольц). Пусть даны две числовые последовательности x_n и y_n, причём y_n строго возрастает и является бесконечно большой. Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

то

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

Доказательство. Рассмотрим возможные случаи:

1^0. $A \in \mathbb{R}$.

2^0. $A = +\infty$.

3^0. $A = -\infty$.

1^0. По определелению 1.2 предела числовой последовательности $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0$ имеем

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

По лемме 1 для всех $n \geqslant N_0$ имеем

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{(x_{N_0+1}-x_{N_0}) + (x_{N_0+2}-x_{N_0+1}) + \ldots + (x_{n+1}-x_n)}{(y_{N_0+1}-y_{N_0}) + (y_{N_0+2}-y_{N_0+1}) + \ldots + (y_{n+1}-y_n)} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Проводя сокращения в числителе и знаменателе, получим

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1}-x_{N_0}}{y_{n+1}-y_{N_0}} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Поскольку последовательность y_n бесконечно большая и строго монотонная, то $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_1$ имеем $y_{n+1} > 0$. Разделив при $n \geqslant \max(N_0, N_1)$ числитель и знаменатель на $y_{n+1} > 0$, получим

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \dfrac{x_{N_0}}{y_{n+1}}}{1 - \dfrac{y_{N_0}}{y_{n+1}}} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Умножая все три части последнего неравенства на $1 - \dfrac{y_{N_0}}{y_{n+1}} > 0$ и прибавляя к каждой из них $\dfrac{x_{N_0}}{y_{n+1}}$, имеем

$$a_{n+1} := \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{N_0}}{y_{n+1}}\right) + \frac{x_{N_0}}{y_{n+1}} < \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{N_0}}{y_{n+1}}\right) + \frac{x_{N_0}}{y_{n+1}} =: b_{n+1}.$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{N_0}}{y_{n+1}} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_{N_0}}{y_{n+1}} = 0,$$

так как y_n — бесконечно большая числовая последовательность, а x_{N_0}, y_{N_0} — постоянные вещественные числа. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A - \frac{\varepsilon}{2},\ \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует существование чисел $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ таких, что $A - \varepsilon < a_{n+1}$ при всех $n \geqslant N_2$

и $b_{n+1} < A+\varepsilon$ при всех $n \geqslant N_3$. Взяв произвольное $n \geqslant \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$, получим

$$A-\varepsilon < a_{n+1} < \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} < b_{n+1} < A+\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A,$$

что завершает рассмотрение случая 1^0.

2^0. По определению предела при $A=+\infty$ имеем $\forall C \in \mathbb{R}\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geqslant N_0$ выполнено

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > C.$$

Как и в случае 1^0, проводя аналогичные рассуждения, для всех $n \geqslant N_0$ получим

$$\frac{x_{n+1}-x_{N_0}}{y_{n+1}-y_{N_0}} > C$$

и

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} > C\left(1-\frac{y_{N_0}}{y_{n+1}}\right) + \frac{x_{N_0}}{y_{n+1}} =: a_{n+1}$$

для всех $n \geqslant \max(N_0, N_1)$. Учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{N_0}}{y_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{N_0}}{y_{n+1}} = 0,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = C,$$

отсюда для некоторого $N_2 \in \mathbb{N}$ при всех $n \geqslant \max(N_0, N_1, N_2)$ будем иметь

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} > C-1.$$

В силу произвольности $C \in \mathbb{R}$ это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

3^0. Рассмотрим последовательность $z_n := -x_n$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}-z_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty.$$

По рассмотренному выше пункту 2^0 имеем

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{y_{n+1}} = +\infty.$$

Делая обратную замену $x_n := -z_n$ и вынося -1 за знак предела, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty,$$

что и требовалось доказать. ◀

> *Замечание 1.* Используя представление $y_{n+1}-y_n = -\big((-y_{n+1})-(-y_n)\big)$ получим, что теорема 1 Штольца остаётся верной для случая, когда последовательность y_n строго

убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. Также стоит отметить, что по аналогичной схеме доказывается вариант теоремы 1 Штольца для случая, когда последовательность y_n строго монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

3. Предел и непрерывность функции одной переменной

3.1 Определение предела функции по Коши и по Гейне, основные свойства предела

Определение 1. Точка x_0 называется **предельной** для множества $\Omega \subset \mathbb{R}$, если

$$\Omega \cap \mathring{O}_\delta(x_0) \neq \varnothing \text{ для всех } \delta > 0.$$

Точки $x_0 \in \Omega$, не являющиеся предельными для множества Ω, называются **изолированными** точками множества Ω.

Лемма 1. Точка x_0 является *предельной* для множества $\Omega \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow$ существует последовательность $x_n \in \Omega \setminus \{x_0\}$, сходящаяся к x_0.

Доказательство.
$\Rightarrow$: Для каждого $n \in \mathbb{N}$ при $\delta_n := 1/n$ согласно определению 1 предельной точки найдётся $x_n \in \Omega \cap \mathring{O}_{\delta_n}(x_0)$, отсюда вытекает сходимость последовательности x_n к точке x_0.
$\Leftarrow$: Если $x_n \to x_0$, то для любого $\delta > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_N \in O_\delta(x_0)$. Так как $x_n \in \Omega \setminus \{x_0\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x_N \in \mathring{O}_\delta(x_0)$. ◀

Определение 2 (Коши). Пусть $\mathbb{R} \ni a$ — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f)$. Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** f в точке a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ из того, что $0 < |x - a| < \delta$ следует, что $|f(x) - b| < \varepsilon$; то есть для любой окрестности $O_\varepsilon(b)$ точки b найдётся такая проколотая окрестность $\mathring{O}_\delta(a)$ точки a, что

$$f\big(\mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(b).$$

При этом употребляются обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$, $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Утверждение 1 о единственности предела. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b' \in \mathbb{R}$, то $b' = b$.

Доказательство. Пусть $b' \neq b$, тогда $\varepsilon := \dfrac{|b' - b|}{2} > 0$ и $O_\varepsilon(b') \cap O_\varepsilon(b) = \varnothing$. Так как a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f)$, то для $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения предела 2 (Коши) найдётся точка $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$, а следовательно $f(x) \in O_\varepsilon(b') \cap O_\varepsilon(b)$, что противоречит выбору ε. ◀

Определение 2′ (Гейне). Пусть $\mathbb{R} \ni a$ — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f)$. Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** f в точке a, если для любой последовательности $x_n \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к

b.

Теорема 1. Определения 2 (Коши) и 2′ (Гейне) эквивалентны.

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2 (Коши). Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{a\}$, сходящуюся к a. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0:$

$$f\big(\mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(b).$$

Также найдётся $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ для всех $n \geqslant N$, а следовательно и $f(x_n) \in O_\varepsilon(b)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $f(x_n) \to b$, а значит $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2′ (Гейне).

$\Leftarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2′ (Гейне), но при этом неверно, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2 (Коши), то есть $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) : f(x) \notin O_{\varepsilon_0}(b)$. Это означает, что для последовательности $\delta_n := 1/n \to 0$ найдётся последовательность $x_n \in \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ такая, что $f(x_n) \notin O_{\varepsilon_0}(b)$, а это автоматически означает, что $f(x_n) \not\to b$. В то же время $x_n \to a$, поэтому $f(x_n) \to b$ по определению 2′ (Гейне) — получили противоречие. ◀

Замечание 1. Наряду с рассмотренными выше определениями предела 2 (Коши) и 2′ (Гейне) для случая $a, b \in \mathbb{R}$ используются также модификации этих определений.

Во-первых, a или b могут принимать значения, равные $-\infty$, $+\infty$ или ∞. Чтобы дать корректное определение предела в этих случаях, в определении 2 (Коши) для точек такого вида нужно использовать определения (проколотых) окрестностей этих точек, введённые в замечании 2.1.1.

Другой важной разновидностью определения предела являются так называемые **односторонние пределы** вида $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$, где $a \in \mathbb{R}$. В этих случаях в определении 2 (Коши) под (проколотыми) окрестностями точек $a-$ и $a+$ понимаются соответственно любые множества вида $O_\delta(a-) = \mathring{O}_\delta(a-) := \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a\}$ и $O_\delta(a+) = \mathring{O}_\delta(a+) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta\}$, где $\delta > 0$.

Можно также рассматривать пределы вида $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b-$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b+$, где $b \in \mathbb{R}$, а окрестности точек $b-$ и $b+$ были определены выше.

Точки a и b любого из типов, описанных выше, будем называть **несобственными**. Отметим, что определение 2′ (Гейне) во всех вышеописанных случаях записывается точно так же, как и в случае $a, b \in \mathbb{R}$, и что оно снова оказывается эквивалентным определению 2 (Коши) (в случае $a \in \{\infty, +\infty, -\infty\}$ при доказательстве теоремы 1 достаточно положить $\delta_n := n$). При этом множества соответствующих последовательностей из определения Гейне обязаны быть непустыми (иначе говоря, предел функции рассматривается только в *предельных точках* её области определения).

Замечание 2. Если $\mathring{O}_\delta(a) \subset \mathrm{Dom}(f)$ для некоторого $\delta > 0$, то

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Замечание 3. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n := f(n)$. Тогда определение 2.1.2 предела последовательности x_n равносильно определению 2 (Коши) для $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Теорема 2 о предельном переходе в неравенстве. Пусть

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1,\ \lim_{x\to a} f_2(x) = b_2,$$

a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$ и найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \tag{1}$$

для всех $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$. Тогда $b_1 \leqslant b_2$.

Доказательство. Пусть $b_1 > b_2$, тогда найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $y_1 > y_2$ для всех $y_1 \in O_\varepsilon(b_1)$, $y_2 \in O_\varepsilon(b_2)$. По определению 2 (Коши) найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $f_1\big(\mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1)\big) \subset O_\varepsilon(b_1)$ и $f_2\big(\mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_2)\big) \subset O_\varepsilon(b_2)$. По определению предельной точки получим существование элемента

$$x_0 \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2),$$

а следовательно $f_1(x_0) > f_2(x_0)$, что противоречит неравенству (1). ◀

Следствие 1 теоремы 2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и найдётся $\delta > 0$ такое, что $f(x) \leqslant c$ $\big(c \leqslant f(x)\big)$ для всех $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$, то $b \leqslant c$ $(c \leqslant b)$.

Теорема 3 [Принцип двустороннего ограничения]. Пусть

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b,$$

a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(g)$ и найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) \tag{2}$$

для всех $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(g)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Доказательство. По определению 2 (Коши) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $f_1\big(\mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1)\big) \subset O_\varepsilon(b)$ и $f_2\big(\mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_2)\big) \subset O_\varepsilon(b)$. В силу неравенств (2) это означает, что при $\mathring{O}_{\delta_3}(a) := \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{O}_{\delta_2}(a)$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_3}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2) \cap \mathrm{Dom}(g) = \mathring{O}_{\delta_3}(a) \cap \mathrm{Dom}(g)$ выполнено $g(x) \in O_\varepsilon(b)$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 4 [Критерий Коши существования предела функции]. Пусть a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f)$, тогда

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \text{ имеем } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon/2) > 0$ такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - b| + |b - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

$\Leftarrow$: Для любого $n \in \mathbb{N}$ выберем $\delta_n > 0$ так, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{1}{n}$ для всех $x_1, x_2 \in \mathring{O}_{\delta(}a) \cap \mathrm{Dom}(f)$. Так как a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f)$, то существует последовательность $x_n \in \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$, а также существует $\xi_{mn} \in \mathring{O}_{\delta_m}(a) \cap \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $m, n \in \mathbb{N}$ получим

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leqslant |f(x_m) - f(\xi_{mn})| + |f(\xi_{mn}) - f(x_n)| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{N} \tag{3}$$

при $m, n \geqslant N$, а значит последовательность $f(x_n)$ является фундаментальной и сходится к некоторому числу $b \in \mathbb{R}$ по критерию Коши **??**. Переходя при любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ в неравенстве (3) к пределу при $n \to \infty$, в силу теоремы 2.1.1 получим

$$|f(x_m) - b| \leqslant \frac{1}{m},$$

поэтому для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_m}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ имеем

$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - b| < \frac{2}{m} \to 0$$

при $m \to \infty$, отсюда получаем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2 (Коши). ◀

Теорема 5 об арифметических свойствах предела. Пусть $f(x) \to a \in \mathbb{R}$, $g(x) \to b \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0$ и x_0 — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$. Тогда $f(x) \pm g(x) \to a \pm b$, $f(x)g(x) \to ab$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ (в случае, если $b \neq 0$) при $x \to x_0$.

Доказательство вытекает из арифметических свойств предела последовательности 2.1.3 и определения $2'$ (Гейне). ◀

Теорема 6 о пределе композиции функций. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = z_0$, $g\colon \mathrm{Dom}(g) \to \mathrm{Dom}(f)$ и найдётся $\delta > 0$ такое, что $g(x) \neq y_0$ для всех $x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = z_0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1(\varepsilon) : f\big(\mathring{O}_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(z_0)$. Также $\exists \delta_2(\delta_1) :$

$$g\big(\mathring{O}_{\delta_2}(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)\big) \subset O_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f).$$

Тогда при $\delta_3 := \min\{\delta, \delta_2\}$ имеем

$$g\big(\mathring{O}_{\delta_3}(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)\big) \subset \mathring{O}_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f),$$

отсюда получаем вложение

$$f\Big(g\big(\mathring{O}_{\delta_3}(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)\big)\Big) \subset f\big(\mathring{O}_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(z_0),$$

завершающее доказательство теоремы. ◀

Замечание 4. Отметим, что в теоремах 5 и 6 точки x_0, y_0, z_0 могут быть *несобственными* (см. замечание 1).

3.2 Непрерывность функции в точке и на некотором множестве. Основные свойства непрерывных функций

Определение 1 (Коши). Функция f называется **непрерывной в точке** $a \in \mathrm{Dom}(f)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ f\big(O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

Замечание 1. Из определения 1 (Коши) вытекает, что в случае, когда a — предельная точка $\mathrm{Dom}(f)$, функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Также любая функция *непрерывна в любой изолированной точке* своей области определения.

Определение 1′ (Гейне). Функция f называется **непрерывной в точке** $a \in \mathrm{Dom}(f)$, если для любой последовательности $x_k \in \mathrm{Dom}(f)$, сходящейся к a, последовательность $f(x_k)$ сходится к $f(a)$.

Определение 2. Функция f называется **непрерывной на множестве** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она непрерывна в каждой точке множества Ω. Класс всех функций f таких, что их сужения $f\big|_\Omega$ непрерывны на Ω, обозначим $C(\Omega)$. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют **непрерывной**. Также условимся вместо $C([a,b])$, $C\big((a,b)\big)$, $C\big([a,b)\big)$, $C\big((a,b]\big)$ пользоваться упрощёнными обозначениями $C[a,b]$, $C(a,b)$, $C[a,b)$, $C(a,b]$.

Аналогично соответствующим теоремам о пределе функции из предыдущего параграфа доказываются теоремы 1′-4′:

Теорема 1′. Определения 1 (Коши) и 1′ (Гейне) эквивалентны.

Теорема 2′ [Критерий Коши непрерывности функции в точке]. Функция f непрерывна в точке $a \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ имеем $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема 3′ об арифметических операциях над непрерывными функциями. Пусть функции f, g непрерывны в точке a. Тогда функции $\alpha f + \beta g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (в случае, если $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 4′ о непрерывности композиции непрерывных функций. Пусть функция f непрерывна в точке $g(x_0)$, а функция g непрерывна в точке x_0. Тогда функция $f \circ g$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 1 о знакопостоянстве непрерывных функций. Пусть функция f непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \operatorname{sgn}\big(f(x)\big) = \operatorname{sgn}\big(f(a)\big)$ для всех $x \in O_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f)$.

Доказательство. По определению 1 (Коши) при $\varepsilon := \dfrac{|f(a)|}{2}$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in O_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f)$ имеем $f(a) - \dfrac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a) + \dfrac{|f(a)|}{2}$. Так как $\operatorname{sgn}\left(f(a) \pm \dfrac{|f(a)|}{2}\right) = \operatorname{sgn}\big(f(a)\big)$, получаем утверждение теоремы. ◀

Теорема 2 о локальной ограниченности непрерывных функций. Если функция f непрерывна в точке a, то найдётся $\delta > 0$ такое, что множество $f\big(O_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f)\big)$ является ограниченным (см. определение 1.3.1).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно в определении 1 (Коши) положить $\varepsilon := 1$ и заметить, что множество $O_1\big(f(a)\big)$ является ограниченным, а значит таковым является и его подмножество $f\big(O_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f)\big)$. ◀

Теорема 3 (Больцано-Коши). Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда для любого числа y, лежащего между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдётся точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f(\xi) = y$.

Доказательство. Для начала рассмотрим случай, когда функция f принимает на концах отрезка $[a,b] =: I_0$ значения разных знаков (то есть $f(a)f(b) < 0$) и докажем, что найдётся точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f(\xi) = 0$. Поделим отрезок $[a,b]$ точкой c_0 пополам. Тогда либо $f(c_0) = 0$ и теорема в нашем случае доказана, либо функция f принимает значения разных знаков на концах одного из отрезков $[a, c_0]$ или $[c_0, b]$; обозначим этот отрезок I_1. Далее, применяя к отрезку I_1 описанную выше процедуру, мы либо найдём точку $c_1 \in I_1 \subset I_0$ такую, что $f(c_1) = 0$, либо построим отрезок $I_2 \subset I_1$, на концах которого функция f принимает значения разных знаков. Продолжая этот процесс, мы либо на некотором шаге найдём точку c_k такую, что $f(c_k) = 0$ и теорема в этом случае будет доказана, либо построим последовательность вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$, у которых существует общая точка ξ по принципу вложенных отрезков **??**. Так как

$$|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0,$$

то по построению найдутся две последовательности x_n и y_n концов отрезков I_n такие, что $f(x_n) > 0$, $f(y_n) < 0$ и $x_n, y_n \to \xi$. В силу непрерывности функции f в точке ξ по определению 1′ (Гейне) имеем $f(x_n), f(y_n) \to f(\xi)$. По теореме 2.1.1 о предельном переходе в неравенстве получим получим $0 \geqslant f(\xi) \leqslant 0$, а значит $f(\xi) = 0$, что и завершает рассмотрение нашего случая.

В общем случае введём вспомогательную функцию $F(x) := f(x) - y$, для которой по условию теоремы выполнено $F(a)F(b) = (f(a) - y)(f(b) - y) < 0$. Так как $F \in C[a,b]$, то по доказанному выше найдётся точка $\xi \in (a, b) : 0 = F(\xi) = f(\xi) - y$, то есть $f(\xi) = y$. ◀

Определение 3. Функция f называется **ограниченной** на множестве $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если множество $f(\Omega)$ является *ограниченным* (см. определение 1.3.1).

Теорема 4 [Первая теорема Вейерштрасса]. Если $f \in C[a, b]$, то функция f ограничена на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Предположим противное, тогда найдётся последовательность $x_p \in [a, b]$ такая, что $|f(x_p)| > p$ для всех $p \in \mathbb{N}$. По теореме Больцано-Вейештрасса найдётся подпоследовательность $x_{p_q} \to x_0 \in [a, b]$ при $q \to \infty$. В силу того, что $f(x_{p_q}) \xrightarrow{\text{O. } 1' \text{ (Гейне)}} f(x_0)$ и леммы 2.1.3, последовательность $f(x_{p_q})$ является ограниченной, но $|f(x_{p_q})| > p_q \geqslant q \to +\infty$, получим противоречие. ◀

Теорема 5 [Вторая теорема Вейерштрасса]. Если $f \in C[a, b]$, то функция f достигает на отрезке $[a, b]$ своего максимума и минимума.

Доказательство. Множество $f([a, b])$ непусто и ограничено по первой теореме Вейерштрасса 4, поэтому существуют $M := \sup f([a, b]) \in \mathbb{R}$ и $m := \inf f([a, b]) \in \mathbb{R}$ по теореме 1.3.1. Докажем существование точки $\xi \in [a, b]$ такой, что $f(\xi) = M$, то есть $f(\xi) = \max f([a, b])$ (доказательство достижимости минимума проводится аналогично). Пусть это не так, тогда по определению 1.3.3 супремума имеем $f(x) < M$ для всех $x \in [a, b]$. Рассмотрим функцию

$$g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$$

для всех $x \in [a, b]$. Так как $M - f(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$, то $g \in C[a, b]$ по теореме $3'$ об арифметических операциях над непрерывными функциями. По первой теореме Вейерштрасса 4 функция g обязана быть ограниченной на $[a, b]$. По определению супремума для любого $A > 0$ найдётся точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что

$$M - \frac{1}{A} < f(x_0) < M,$$

а следовательно

$$0 < M - f(x_0) < \frac{1}{A}$$

и

$$g(x_0) = \frac{1}{M - f(x_0)} > A,$$

что противоречит ограниченности функции g на отрезке $[a, b]$. ◀

3.3 Монотонная функция. Обратная функция

Определение 1. Функция f называется **неубывающей (невозрастающей) на множестве** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in \Omega$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big(f(x_1) \geqslant f(x_2)\big).$$

Такие функции называются **монотонными на множестве** Ω.

Определение 2. Функция f называется **возрастающей (убывающей) на множестве** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in \Omega$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)\big(f(x_1) > f(x_2)\big).$$

Такие функции называются **строго монотонными на множестве** Ω.

Определение 3 обратной функции. Пусть $f : A \to B$. Функция $f^{-1} : f(A) \to A$ называется **обратной** к функции f, если $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ для всех $(x, y) \in A \times f(A)$. В случае существования обратной функции f^{-1} функция f называется **обратимой**.

Утверждение 1. Функция $f : A \to B$ обратима тогда и только тогда, когда она *инъективна*. Если обратная функция f^{-1} существует, то она единственна, обратима и функция f является обратной к ней.

Доказательство. Если функция f инъективна, то для любого $y \in f(A)$ положим $f^{-1}(y) := x \in A$, где x — единственный элемент такой, что $f(x) = y$. Если функция f обратима, $x_1, x_2 \in A$ и $f(x_1) = f(x_2) =: y$, то $x_1 = x_2 = f^{-1}(y)$, то есть f инъективна. Если функции $f_1^{-1}, f_2^{-1} : f(A) \to A$ являются обратными к функции f, то для любого элемента $y \in f(A)$ и элемента $x \in A$ такого, что $y = f(x)$, имеем $x = f_1^{-1}(y) = f_2^{-1}(y)$, то есть $f_1^{-1} = f_2^{-1}$. Для проверки того, что функция f является обратной для f^{-1}, в силу определения 3 достаточно проверить, что $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Последний факт вытекает непосредственно из того, что для любого $x \in A$ выполнено равенство $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$. ◀

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$, функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ возрастает (убывает) на множестве Ω. Тогда существует возрастающая (убывающая) *обратная* (см. определение 3) функция $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$.

Доказательство. Функция $f : \Omega \to f(\Omega)$ по определению *сюръективна*. Из строгой монотонности функции f (см. определение 2) вытекает её *инъективность* на множестве Ω, поэтому существует *обратная* функция $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$. Для любых $y_1, y_2 \in f(\Omega)$ имеем $f^{-1}(y_1) =: x_1 \in \Omega$, $f^{-1}(y_2) =: x_2 \in \Omega$. Воспользовавшись определением 2, для возрастающей (убывающей) функции f для любых $y_1, y_2 \in f(\Omega)$ получим

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow f\big(f^{-1}(y_1)\big) < f\big(f^{-1}(y_2)\big)\Big(f\big(f^{-1}(y_1)\big) > f\big(f^{-1}(y_2)\big)\Big) \Leftrightarrow y_1 < y_2 (y_1 > y_2),$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Лемма 1. Пусть функция $f \in C[a, b]$ не убывает (не возрастает) на отрезке $[a, b]$. Тогда $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ $\big(f([a, b]) = [f(b), f(a)]\big)$.

Доказательство. Пусть функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично). По определению 1 для всех $x \in [a, b]$ имеем $f(x) \in [f(a), f(b)]$. По теореме 2.3 для любого $y \in \big(f(a), f(b)\big)$ найдётся $\xi \in (a, b) : y = f(\xi)$, поэтому $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. ◀

Лемма 2. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $f \in C(a, b)$ строго монотонна на (a, b). Тогда $f\big((a, b)\big) = (c, d)$, где $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$.

Доказательство. Пусть функция f возрастает на (a, b) (случай убывающей функции рассматривается аналогично). Рассмотрим убывающую последовательность $a_n \in (a, b)$ и возрастающую последовательность $b_n \in (a, b)$, стремящиеся соответственно к a и b. Тогда последовательность $f(a_n)$ убывает, последовательность $f(b_n)$ возрастает и

$$f\big((a, b)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([a_n, b_n]) \overset{\text{л. 1}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} [f(a_n), f(b_n)] =: (c, d),$$

где $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$. ◀

> ***Замечание 1.*** Как и при доказательстве леммы 2 проверяется, что если на некотором *промежутке* (см. определение 1.4.4) I функция $f \in C(I)$ монотонна, то $f(I) = J$, где J также является *промежутком*.

Теорема 2 об обратной функции на отрезке. Пусть функция $f \in C[a, b]$ возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$. Тогда существует возрастающая (убывающая) *обратная* (см. определение 3) функция $f^{-1} \in C\big(f([a, b])\big)$, где $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ $\big(f([a, b]) = [f(b), f(a)]\big)$.

Доказательство. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$ (случай убывающей функции рассматривается аналогично). По лемме 1 имеем $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, а по теореме 1 существует возрастающая обратная функция $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$.

Проверим, что $f^{-1} \in C([f(a), f(b)])$. Для произвольного $y_0 \in [f(a), f(b)]$ рассмотрим произвольную последовательность $y_n \in [f(a), f(b)]$, сходящуюся к y_0. Тогда $x_n := f^{-1}(y_n) \in [a, b]$ и $f(x_n) = y_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}^+$. Для проверки непрерывности функции f^{-1} в точке y_0 достаточно убедиться в том, что последовательность x_n стремится к x_0. Если это не так, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдётся её подпоследовательность $x_{n_k} \in [a, b]$ такая, что $|x_{n_k} - x_0| \geqslant \varepsilon_0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, из которой по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_{k_p}} \to x_0' \in [a, b]$, причём $x_0' \neq x_0$, а значит $f(x_0') \neq f(x_0) = y_0$ в силу строгой монотонности функции f на отрезке $[a, b]$. Так как $f \in C[a, b]$, то $y_{n_{k_p}} = f(x_{n_{k_p}}) \to f(x_0')$ по определению 2.1′ (Гейне), поэтому $f(x_0') = y_0$ в силу единственности предела последовательности. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 3 об обратной функции на промежутке. Пусть на некотором *промежутке* (см. определение 1.4.4) I функция $f \in C(I)$ возрастает (убывает). Тогда существует возрастающая (убывающая) *обратная* (см. определение 3) функция $f^{-1} \in C(J)$, где $J := f(I)$ также является *промежутком*.

Доказательство. Пусть функция f возрастает на I (случай убывающей функции рассматривается аналогично). В силу замечания 1 имеем $f(I) = J$, где J — промежуток. По теореме 1 существует возрастающая обратная функция $f^{-1} : J \to I$.

Проверим, что $f^{-1} \in C(J)$. Пусть промежуток J состоит более, чем из одной точки (иначе утверждение очевидно). Для произвольного $y_0 \in J$ рассмотрим некоторый отрезок $[y_1, y_2] \subset J$ такой, что $y_1 < y_0 < y_2$ в случае, когда y_0 — внутрення точка промежутка J, $y_1 := y_0 < y_2$ в случае, когда y_0 — левая граничная точка промежутка J и $y_1 < y_0 =: y_2$ в случае, когда y_0 — правая граничная точка промежутка J. Заметим, что сужение функции f^{-1} на отрезок $[y_1, y_2]$ есть функция, обратная к сужению функции f на отрезок $[f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)]$ и доставляемая теоремой 2 в силу единственности обратной функции (см. утверждение 1), а значит непрерывная в точке y_0, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 4. Пусть $f \in C[a, b]$, тогда f — инъективна на $[a, b] \Leftrightarrow f$ — строго монотонна на $[a, b]$.

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $f(a) < f(b)$ (случай $f(a) > f(b)$ рассматривается аналогично). Сперва докажем, что $f(x) < f(b)$ для всех $x \in (a, b)$. Если это не так, то $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) > f(b) > f(a)$. По теореме 2.3 Больцано-Коши найдутся точки $\xi_1 \in (a, x_0)$ и $\xi_2 \in (x_0, b)$ такие, что $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \dfrac{f(x_0) + f(b)}{2}$, а значит функция f не инъективна. Теперь для произвольных $x_1, x_2 \in [a, b) : x_1 < x_2$ докажем, что $f(x_1) < f(x_2)$. Пусть $f(x_2) < f(x_1) < f(b)$, тогда по теореме 2.3 Больцано-Коши найдутся точки $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ и $\xi_2 \in (x_2, b)$ такие, что $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, а значит функция f не инъективна. Таким образом для произвольных $x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2$ доказано, что $f(x_1) < f(x_2)$, то есть функция f строго возрастает на отрезке $[a, b]$.

$\Leftarrow$: Вытекает из определения 2 строго монотонной функции. ◀

Следствие 1 утверждения 1 и теорем 2, 4. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда f обратима $\overset{\text{Утв. } 1}{\Leftrightarrow}$ f инъективна $\overset{\text{Т. } 4}{\Leftrightarrow}$ f строго монотонна; при выполнении любого из этих трёх условий имеем $f^{-1} \in C[c, d]$, где $[c, d] := f([a, b])$, причём функция f^{-1} строго монотонна.

Следствие 2 утверждения 1 и теорем 3, 4. Пусть $f \in C(I)$ для некоторого *промежутка* (см. определение 1.4.4) I. Тогда f обратима $\overset{\text{Утв. } 1}{\Leftrightarrow}$ f инъективна $\overset{\text{Т. } 4}{\Leftrightarrow}$ f строго монотонна (для доказательства $\Rightarrow$ здесь используется представление $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots$ и наблюдение о том, что функция f обязана иметь тот же характер монотонности, что и на первом отрезке $[a_i, b_i]$, состоящим более чем из одной точки, в случае его существования); при выполнении любого из этих трёх условий имеем $f^{-1} \in C(J)$, где $J := f(I)$ — промежуток, причём функция f^{-1} строго монотонна.

3.4 Классификация точек разрыва. О точках разрыва монотонной функции

Определение 1. Точка $a \in \mathbb{R}$, предельная для множества $\mathrm{Dom}(f)$, в которой функция f не является непрерывной, называется **точкой разрыва** функции f. Если при этом

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R},$$

то a называют точкой **устранимого** разрыва. Если

$$\exists \lim_{x \to a-} f(x) =: f(a-) \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{x \to a+} f(x) =: f(a+) \in \mathbb{R} \text{ и } f(a-) \neq f(a+),$$

то a называют точкой разрыва **первого рода**. Во всех остальных случаях a называется точкой разрыва **второго рода**.

Теорема 1 о пределе монотонной функции.
Пусть $m, M \in \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция f не убывает (не возрастает) на (a, b). Если $f(x) \geqslant m$ ($f(x) \leqslant M$) для всех $x \in (a, b)$, то существует $\lim\limits_{x \to a+} f(x) =: f(a+) \in \mathbb{R}$ и $f(a+) = \inf\limits_{x \in (a,b)} f(x) \geqslant m$ ($f(a+) = \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) \leqslant M$).
Если $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$) для всех $x \in (a, b)$, то существует $\lim\limits_{x \to b-} f(x) =: f(b-) \in \mathbb{R}$ и $f(b-) = \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) \leqslant M$ ($f(b-) = \inf\limits_{x \in (a,b)} f(x) \geqslant m$).

Доказательство.

Пусть функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично). Если $f(x) \geqslant m$ для всех $x \in (a, b)$, то существует $\inf\limits_{x \in (a,b)} f(x) =: l \geqslant m$. по определению инфимума 1.3.3 это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) < l + \varepsilon$. Тогда для всех $x \in (a, x_0)$ выполнено $l \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) < l + \varepsilon$, а значит $f(a+) = l$.

Если $f(x) \leqslant M$ для всех $x \in (a, b)$, то существует $\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) =: r \leqslant M$. по определению супремума 1.3.3 это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) > r - \varepsilon$. Тогда для всех $x \in (x_0, b)$ выполнено $r - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant r$, а значит $f(b-) = r$. ◀

Теорема 2 о точках разрыва монотонной функции. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ монотонна на (a, b). Тогда все точки разрыва функции f суть точки разрыва первого рода, причём их множество не более чем счётно.

Доказательство. Пусть функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично), $x_0 \in (a, b)$. Так как $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$, то по теореме 1 существует $f(x_0-) \leqslant f(x_0)$. Так как $f(x) \geqslant f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, b)$, то по той же теореме существует $f(x_0+) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0-)$. Если $f(x_0-) = f(x_0+) = l$, то $l = f(x_0)$ и функция f непрерывна в точке x_0. Таким образом, если x_0 является точкой разрыва функции f, то $f(x_0-) < f(x_0+)$ и x_0 — точка разрыва первого рода.

Далее рассмотрим множество Ω всех точек разрыва функции f и произвольную функцию $\varphi : \Omega \to \mathbb{Q}$ такую, что $\varphi(x) \in \mathbb{Q} \cap \big(f(x-), f(x+)\big)$ для всех $x \in \Omega$. Пусть

$x_1, x_2 \in \Omega$ и $x_1 < x_2$. Так как $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ для всех $x \in (x_1, x_2)$, то в силу теоремы 1 имеем $f(x_1+) = \inf\limits_{x\in(x_1,x_2)} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in(x_1,x_2)} f(x) = f(x_2-)$, а следовательно $\varphi(x_1) < f(x_1+) \leqslant f(x_2-) < \varphi(x_2)$ и $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$, а значит функция φ инъективна, поэтому $\operatorname{card}(\Omega) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. ◀

Теорема 3. Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ не убывает (не возрастает) на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$f \in C[a, b] \Leftrightarrow f([a, b]) = [f(a), f(b)] \ \big(f([a, b]) = [f(b), f(a)]\big).$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Следует из леммы 3.1.

$\Leftarrow$: Рассмотрим случай, когда функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично). Пусть $f \notin C[a, b]$, тогда у функции f существует точка разрыва $x_0 \in [a, b]$. Определим неубывающую функцию $\widetilde{f} : (a - 1, b + 1) \to \mathbb{R}$ равенством

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [a, b] \\ f(a) & \text{при } x \in (a-1, a) \\ f(b) & \text{при } x \in (b, b+1) \end{cases}$$

и заметим, что x_0 является также точкой разрыва функции $\widetilde{f}$. При доказательстве теоремы 2 было учтановлено, что $\widetilde{f}(x_0-) < \widetilde{f}(x_0+)$, также имеем $\widetilde{f}(y) \leqslant \sup\limits_{x\in(a-1,x_0)} \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x_0-)$ для всех $y \in (a - 1, x_0)$ и $\widetilde{f}(x_0+) = \inf\limits_{x\in(x_0,b+1)} \widetilde{f}(x) \leqslant \widetilde{f}(z)$ для всех $z \in (x_0, b + 1)$ по теореме 1. Подставляя в последние неравенства $y = a - 1/2$, $z = b + 1/2$, получим $[\widetilde{f}(x_0-), \widetilde{f}(x_0+)] \subset [f(a), f(b)]$. Также из этих неравенств следует, что $\widetilde{f}(x) \notin \big(\widetilde{f}(x_0-), \widetilde{f}(x_0+)\big)$ для всех $x \in (a - 1, b + 1) \setminus \{x_0\}$, а значит и подавно $f(x) \notin \big(\widetilde{f}(x_0-), \widetilde{f}(x_0+)\big)$ для всех $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, поэтому $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

3.5 Простейшие элементарные функции

3.5.1 Показательная, логарифмическая и степенная функции

Для всех $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции $f_n(x) := x^n \in C(\mathbb{R})$. Так как все функции f_n возрастают на $[0, +\infty)$, а при $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ возрастают на $\mathbb{R}$, согласно теореме 3.3 существуют возрастающие непрерывные обратные функции $\sqrt[n]{t} := f_n^{-1}(t)$, определённые при $n = 2k$ на $[0, +\infty)$, а при $n = 2k - 1$ на $\mathbb{R}$, где $k \in \mathbb{N}$. Далее для всех рациональных чисел $r = \dfrac{p}{q}$ определяются функции

$$x^r := \sqrt[q]{x^p} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

и проверяются свойства степеней с рациональным показателем, известные из школьного курса. Затем для любого $a > 1$ определяется **показательная** функция $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}$$

и проверяется её непрерывность, положительность и возрастание на $\mathbb{R}$. Также доказывается, что для всех $a > 1$ выполнено $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Далее для любого $a \in (0,1)$ определяется **показательная** функция $a^x := \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и проверяется её непрерывность, положительность и убывание на $\mathbb{R}$. Затем проверяются свойства степеней, известные из школьного курса.

Из свойств показательной функции a^x и теоремы 3.3 для любого $a > 0, a \neq 1$ вытекает существование непрерывной строго монотонной функции, обратной к a^x, называемой **логарифмической** и обозначаемой $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Затем проверяются свойства логарифмической функции, известные из школьного курса. При $a = e$ вместо $\log_a x$ будем использовать стандартное обозначение $\ln x$.

Далее для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ определяется **степенная** функция

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Отметим, что при $\alpha = \dfrac{p}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ функция $x^\alpha := \sqrt[2k-1]{x^p}$ корректно определена для всех $x \neq 0$, а при $p \in \mathbb{N}$ — для всех $x \in \mathbb{R}$. Свойства степенной функции извлекаются из ранее установленных свойств степеней, а также из свойств показательной и логарифмической функций. Более подробное описание свойств рассмотренных выше функций можно найти, напимер, в [3, страницы 138—147].

3.5.2 Об углах, их мере и тригонометрических функциях

В этом пункте мы опираемся на аксиоматику евклидовой геометрии, принятую в [4]. Также для его полного понимания потребуются знания основ теории групп, свойств комплексных чисел и степенных рядов. Всюду в этом параграфе через Π будем обозначать *геометрическую плоскость*.

Определение 1. **Углом** на плоскости Π называется (см. [4, страница 129]) произвольный элемент фактор-группы $\mathcal{A} := \mathcal{J}^+/\mathcal{T}$, где $\mathcal{J}^+$ — группа *собственных изометрий* (или *собственных движений*) плоскости Π (см. [4, страница 101]), её *нормальная* (см. [1, страница 139]) *коммутативная подгруппа* $\mathcal{T}$ — это группа (параллельных) *переносов* (или *сдвигов*). Для групповой операции в $\mathcal{A}$ (являющейся на самом деле композицией отображений) традиционно принята аддитивная символика.

Для любой точки $a \in \Pi$ через $\mathcal{R}_a$ будем обозначать коммутативную группу *вращений с центром* (или *поворотов вокруг точки*) a. Отметим, что для групповой операции в $\mathcal{R}_a$ традиционно принята аддитивная символика, а состоит эта группа из всевозможных отображений плоскости Π в себя, представимых в виде композиции двух *отражений* (или *осевых симметрий*) и сохраняющих точку a неподвижной (см. [4, страница 97]). Для любых $a, b \in \Pi$ через $T_{ab} \in \mathcal{T}$ будем обозначать (единственный) перенос, переводящий точку a в точку b, то есть $T_{ab}(a) = b$. Для любых $a, b \in \Pi$ определим функцию (называемую *трансформацией переносом*) $\varphi_{ab} : \mathcal{R}_a \to \mathcal{R}_b$ для всех $\alpha_a \in \mathcal{R}_a$ по правилу $\varphi_{ab}(\alpha_a) := T_{ab} \circ \alpha_a \circ T_{ba}$. Далее проверяется, что функция φ_{ab} осуществляет *изоморфизм* группы $\mathcal{R}_a$ на группу $\mathcal{R}_b$ (см. [1, страница 215]). Таким образом на множестве всех вращений вокруг всевозможных точек плоскости Π можно определить *отношение эквивалентности*: для любых $\alpha_a \in \mathcal{R}_a$, $\alpha_b \in \mathcal{R}_b$ положим $\alpha_a \sim \alpha_b$, если $\alpha_b = \varphi_{ab}(\alpha_a)$. Множество $\mathcal{A}'$ классов эквивалентности по отношению $\sim$ совпадает со множеством углов $\mathcal{A}$. Определив сумму двух элементов множества $\mathcal{A}'$ как класс, соответствующий сумме их представителей из некоторого $\mathcal{R}_c$ (легко показать, что значение такой суммы не зависит от выбора точки c), мы получим группу $\mathcal{A}$, введённую в определении 1. Это означает, что для произвольной точки $O \in \Pi$ имеет место *изоморфизм групп* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R}_O$, то есть *угол* можно также корректно определить как вращение вокруг произвольной фиксированной точки O, что и сделано в [4].

Определение 2. Фиксируем *ортонормированный базис* (a, O, b) плоскости Π и с его помощью определим функции $\mathrm{Sin}, \mathrm{Cos} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ следующим образом: для любого угла $\alpha \in \mathcal{A}$ значения $\mathrm{Cos}\,\alpha$ и $\mathrm{Sin}\,\alpha$ суть соответственно первая и вторая координаты точки $\alpha_O(O + a)$ в базисе (a, O, b), где α_O — единственное вращение такое, что $\alpha_O \in \mathcal{R}_O$ и $\alpha_O \in \alpha$, а сумма определяется в *центрированной плоскости* (Π, O).

Замечание 1. Отметим (см. [4, страница 155]), что значения $\mathrm{Cos}\,\alpha$ не зависят от выбора ортонормированного базиса (a, O, b), тогда как значения $\mathrm{Sin}\,\alpha$ поменяют знак при изменении *ориентации* (см. [4, страница 145]) тройки (a, O, b) на противоположную.

Далее пусть (a, O, b) — ортонормированный базис из определения 2, $\mathcal{R}_O \ni \alpha_O$ — вращение вокруг точки O на произвольный угол $\alpha \in \mathcal{A}$ (то есть $\alpha_O \in \alpha$). Тогда для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ имеем (см. [4, страница 157])

$$\alpha_O(\xi a + \eta b) = (\xi \mathrm{Cos}\,\alpha - \eta \mathrm{Sin}\,\alpha)a + (\xi \mathrm{Sin}\,\alpha + \eta \mathrm{Cos}\,\alpha)b, \tag{1}$$

где арифметические операции определяются в *центрированной плоскости* (Π, O). Так как вращение α_O является *изометрией*, из свойств *скалярного произведения*, подставляя $(\xi, \eta) = (1, 0)$, для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ мы получаем

$$\mathrm{Sin}^2\,\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\alpha = 1.$$

Отметим, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha_O, \beta_O \in \mathcal{R}_O : \alpha_O \in \alpha, \beta_O \in \beta$, то $\alpha_O \neq \beta_O$, поэтому $(\mathrm{Sin}\,\alpha, \mathrm{Cos}\,\alpha) \neq (\mathrm{Sin}\,\beta, \mathrm{Cos}\,\beta)$ в силу равенства (1). Обратно, если $x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$, то найдётся (см. [4, страница 98]) $\alpha_O \in \mathcal{R}_O : \alpha_O(a) = xa + yb$. Так как в силу (1) для угла $\alpha \in \mathcal{A} : \alpha_O \in \alpha$ получим $\alpha_O(a) = \mathrm{Cos}\,\alpha\, a + \mathrm{Sin}\,\alpha\, b$, то $\mathrm{Cos}\,\alpha = x$, $\mathrm{Sin}\,\alpha = y$.

Определим *мультипликативную группу* $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, где $\mathbb{C}$ — *поле комплексных чисел*. Из сказанного выше следует, что функция $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{T}$, определённая равенством

$$\varphi(\alpha) := \mathrm{Cos}\,\alpha + i\,\mathrm{Sin}\,\alpha \tag{2}$$

для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, является *биекцией*. Далее из того, что для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ и $\alpha_O, \beta_O \in \mathcal{R}_O$: $\alpha_O \in \alpha$, $\beta_O \in \beta$ мы имеем $\alpha_O \circ \beta_O = \alpha_O + \beta_O \in \alpha + \beta$, применяя равенство (1) при $(\xi, \eta) = (1, 0)$, получим

$$\alpha_O\big(\beta_O(a)\big) = \operatorname{Cos}(\alpha+\beta)a + \operatorname{Sin}(\alpha+\beta)b = (\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta)a + (\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta)b,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta, \\ \operatorname{Sin}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Из равенств (3) вытекает, что $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$, то есть φ — *изоморфизм* группы $\mathcal{A}$ *на* группу $\mathbb{T}$.

Далее определим непрерывную функцию $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ формулой

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}. \tag{4}$$

Для всех $x \in \mathbb{R}$ ряд (4) *сходится абсолютно* по признаку Даламбера, так как при $x \neq 0$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Используя теорему *о почленном перемножении абсолютно сходящихся рядов*, для всех $x, y \in \mathbb{R}$ получим

$$g(x)g(y) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!}\Big) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(ix)^n (iy)^m}{n!m!} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l} \frac{(ix)^k (iy)^{l-k}}{k!(l-k)!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} C_l^k (ix)^k (iy)^{l-k} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ix+iy)^l}{l!} = g(x+y),$$

поэтому g есть *непрерывный гомоморфизм* аддитивной группы $\mathbb{R}$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}$. Также для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|g(x)|^2 = g(x)\overline{g(x)} = g(x)g(-x) = g(0) = 1,$$

поэтому $g : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$. Далее определим функции $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ формулами

$$c(x) := \operatorname{Re} g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}, \tag{5}$$

$$s(x) := \operatorname{Im} g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}. \tag{6}$$

Таким образом $g(x) = c(x) + is(x)$ и $|g(x)|^2 = c^2(x) + s^2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Так как $|g(x)| = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$ получим

$$s^2(x) + c^2(x) = 1. \tag{7}$$

Используя равенство $g(x+y) = g(x)g(y)$, для всех $x, y \in \mathbb{R}$ получим

$$\begin{aligned} c(x+y) &= c(x)c(y) - s(x)s(y), \\ s(x+y) &= s(x)c(y) + c(x)s(y). \end{aligned} \tag{8}$$

Далее, дифференцируя ряды (5) и (6) *почленно*, получим для всех $x \in \mathbb{R}$ равенства

$$s'(x) = c(x), \; c'(x) = -s(x). \tag{9}$$

Теперь, используя формулу (5) заметим, что $c(2) < -1 + 2/3 < 0$. Так как $c(0) = 1 > 0$, то $\exists \xi \in (0, 2) : c(\xi) = 0$. Определим число $l := \inf\{\xi \in (0, 2) : c(\xi) = 0\} \in (0, 2)$. Далее определим число Пи:

$$\pi := 2l.$$

Так как $s(0) = 0$ и $s'(x) = c(x) > 0$ для всех $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $s(x) > 0$ на этом интервале, а также $s\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ в силу (7). таким образом

$$s(0) = 0, \; c(0) = 0, \; s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \; c\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{10}$$

В силу непрерывности функций c и s это означает, что образ отрезка $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ под действием функции g состоит из всех элементов множества $\mathbb{T}$, вещественная и мнимая части которых неотрицательны. Далее из равенств (8), (10) вытекает, что функции c и s периодичны с периодом 2π и что $g\big([0, 2\pi)\big) = \mathbb{T}$. Отметим также, что для всех $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ выполнено $(s(x) - x)' = c(x) - 1 < 0$ и

$$0 < s(x) < x. \tag{11}$$

Далее, используя равенство (6), получим

$$s(x) = x + x^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m-2},$$

причём при $|x| \leqslant 1$

$$\Big| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m-2} \Big| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x|^{2m-2}}{(2m+1)!} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} =: M,$$

поэтому

$$s(x) = x + \underline{O}(x^3) = \overline{o}(x^2)$$

при $x \to 0$, откуда автоматически получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1.$$

Далее, используя функции φ и g, заданные формулами (2) и (4), определим функцию

$$\mu := \varphi^{-1} \circ g : \mathbb{R} \to \mathcal{A}, \tag{12}$$

называемую **радианной мерой углов**. Если на группе углов $\mathcal{A}$ задать топологию, индуцированную из $\mathbb{T}$ посредством биекции φ^{-1}, то мы получим, что μ — *непрерывный гомоморфизм* аддитивной группы $\mathbb{R}$ на группу $\mathcal{A}$.

Определение 3. Определим функции $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ формулами

$$\sin x := \operatorname{Sin} \mu(x), \ \cos x := \operatorname{Cos} \mu(x),$$

где Sin и Cos суть функции из определения 2, а функция μ определяется равенством (12).

Утверждение 1. Функции sin и cos, введённые в определении 3, не зависят от выбора ортонормированного базиса (a, O, b), фигурирующего в определении 2. Более того, $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнены равенства $\sin x = s(x)$, $\cos x = c(x)$, где функции c и s определены формулами (5) и (6).

Доказательство. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ обозначим $\alpha := \mu(x) = \varphi^{-1}\big(g(x)\big) = \varphi^{-1}\big(c(x) + is(x)\big) \in \mathcal{A}$. Так как $\varphi(\alpha) = c(x) + is(x)$, а также по определению $\varphi(\alpha) := \operatorname{Cos}\alpha + i\operatorname{Sin}\alpha$, то $\operatorname{Cos}\alpha = c(x)$ и $\operatorname{Sin}\alpha = s(x)$, а следовательно

$$\sin x = \operatorname{Sin}\mu(x) = \operatorname{Sin}\alpha = s(x), \ \cos x = \operatorname{Cos}\mu(x) = \operatorname{Cos}\alpha = c(x).$$

◀

Замечание 2. Заменив базис (a, O, b) в определении 2 на некоторый ортонормированный базис *противоположной ориентации*, мы получим функции Sin_1, φ_1, μ_1, отличные от функций Sin, φ, μ соответственно. Так как $\operatorname{Sin}_1\alpha = -\operatorname{Sin}\alpha$ (см. замечание 1), то для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ выполнено равенство $\varphi_1(\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)}$. Используя формулы (3) и равенство $(\operatorname{Cos}0, \operatorname{Sin}0) = (1, 0)$, получим равенство $\varphi(-\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)} = \varphi_1(\alpha)$, откуда для всех $z \in \mathbb{T}$ получаем $\varphi_1^{-1}(z) = -\varphi^{-1}(z)$, а следовательно $\mu_1(x) = -\mu(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом существуют ровно две различные *радианные меры углов*, отличающиеся знаком. Зафиксировав на плоскости Π *ориентацию*, мы однозначно определяем радианную меру μ. При этом **радианом** по определению называется угол, равный $\mu(1)$.

Замечание 3. Можно также дать абстрактное определение меры $\widetilde{\mu}$ углов как некоторого *непрерывного гомоморфизма* аддитивной группы $\mathbb{R}$ на группу $\mathcal{A}$, где топология на $\mathcal{A}$ индуцирована из $\mathbb{T}$ посредством биекции φ^{-1} (эта топология не зависит от выбора ориентации плоскости Π, так как $-\varphi^{-1}(z) = \varphi^{-1}(\overline{z})$, а функция $z \mapsto \overline{z}$ непрерывна в $\mathbb{C}$). Далее можно показать (см. [4, страница 165]), что для любых двух мер $\widetilde{\mu}_1$, $\widetilde{\mu}_2$, удовлетворяющих данному определению, найдётся константа $k \neq 0$ такая, что $\widetilde{\mu}_2(x) = \widetilde{\mu}_1(kx)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 4. Оказывается (см. [2, страницы 146—149]), что свойства (7), (8), (10), (11) определяют пару функций $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *однозначно*. Это в совокупности с утверждением 1 автоматически означает, что из перечисленных свойств можно вывести любое свойство, которым обладает функция sin или cos (в частности, их 2π-периодичность и непрерывность на $\mathbb{R}$, что и сделано, например, в [3, страницы 148—154]).

Далее для всех $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ определяется функция $\operatorname{tg} x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$; для всех $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

определяется функция $\operatorname{ctg} x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Из свойств функций sin и cos выекает непрерывность функций tg, ctg на своих областях определения, их периодичность с периодом π, а также (см., например, [2, страницы 149—155]) неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{13}$$

для всех $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.5.3 Обратные тригонометрические функции

В силу возрастания и непрерывности функции sin на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ по теореме 3.2 имеем существование непрерывной возрастающей функции, обратной к sin, называемой **арксинусом** и обозначаемой $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

В силу убывания и непрерывности функции cos на отрезке $[0, \pi]$ по теореме 3.2 имеем существование непрерывной убывающей функции, обратной к cos, называемой **арккосинусом** и обозначаемой $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

В силу возрастания и непрерывности функции tg на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ по теореме 3.3 имеем существование непрерывной возрастающей функции, обратной к tg, называемой **арктангенсом** и обозначаемой $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

В силу убывания и непрерывности функции ctg на интервале $(0, \pi)$ по теореме 3.3 имеем существование непрерывной убывающей функции, обратной к ctg, называемой **арккотангенсом** и обозначаемой $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to [0, \pi]$.

В заключение отметим, что в параграфе 3.5 мы определили 11 функций, которые принято называть *простейшими элементарными функциями*. Из непрерывности всех рассмотренных функций на своих областях определения и из теорем $2.3'$, $2.4'$ вытекает, что любая *элементарная функция* (то есть функция, построенная из простейших при помощи арифметических операций и композиций) непрерывна на своей области определения.

3.6 Определение и основные свойства о-малых

Определение 1 (о-малое). Через $o(g)$ (читается как **о малое** от g) **в точке** a будем обозначать *любую функцию* f, для которой существуют число $\delta > 0$ и функция $\alpha\colon \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g) \cap \mathring{O}_\delta(a) =: \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $|f(x)| \leqslant \alpha(x)|g(x)|$ при всех $x \in \Omega$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Также в литературе часто используется обозначение $\overline{o}(g)$.

Замечание 1. Если $f = o(g)$ в точке a по определению 1, то полагая

$$\alpha_1(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{при } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{при } g(x) = 0 \end{cases}$$

для всех $x \in \Omega$, получим $f(x) = \alpha_1(x)g(x)$ и $|\alpha_1(x)| \leqslant |\alpha(x)|$ для всех $x \in \Omega$, поэтому

$\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)=0$. Таким образом неравенство $|f(x)|\leqslant\alpha(x)|g(x)|$ в определении 1 можно заменить на равенство $f(x)=\alpha(x)g(x)$. Также из этого наблюдения вытекает, что $o(1)$ — это произвольная бесконечно малая в точке a функция.

Определение 2 (О-большое). Через $O(g)$ (читается как **О большое** от g) **в точке** a будем обозначать *любую функцию* f, для которой существуют числа $\delta>0$ и $M\geq 0$ такие, что $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$ при всех $x\in\Omega:=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)\cap\mathring{O}_\delta(a)$. Также в литературе часто используется обозначение $\underline{O}(g)$.

Теорема 1 об общих свойствах о-малых.
Пусть $\mathrm{Dom}(f_1)=\mathrm{Dom}(f_2)$ и $\mathrm{Dom}(g_1)=\mathrm{Dom}(g_2)$ и во всех нижеследующих утверждениях предполагается, что о-малые и О-большие рассматриваются в точке a. Тогда

1. $f_1=o(g_1)\ \&\ f_2=o(g_1)\Rightarrow f_1\pm f_2=o(g_1)$.
2. $g_2=O(g_1)\ \&\ f_1=o(g_2)\Rightarrow f_1=o(g_1)$.
3. $f_1=O(g_1)\ \&\ f_2=o(g_2)\Rightarrow f_1f_2=o(g_1g_2)$.
4. $f_1=o(g_1)\Rightarrow f_1f_2=o(g_1f_2)$.
5. $f_1=o(g_1)\ \&\ f_2=o(f_1)\Rightarrow f_2=o(g_1)$.
6. $f_1=o(g_1)\ \&\ f_2=o(g_2)\Rightarrow f_1f_2=o(g_1g_2)$.
7. $f_1=o(g_1)\ \&\ f_2=o(g_1+f_1)\Rightarrow f_2=o(g_1)$.
8. Пусть $f_1=o(f_2)$, $g_1:\mathrm{Dom}(g_1)\to\mathrm{Dom}(f_1)$, $\lim\limits_{x\to a}g_1(x)=a$ и найдётся $\delta>0$ такое, что $g_1(x)\neq a$ для всех $x\in\mathrm{Dom}(g_1)\cap\mathring{O}_\delta(a)$. Тогда $f_1\circ g_1=o(f_2\circ g_1)$.

Доказательство. Проверим, например, свойства 4 и 7. Из равенства $f_1=o(g_1)$ по определению 1 о-малого получаем, что a — предельная точка для множества $\Omega:=\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathrm{Dom}(g_1)=\mathrm{Dom}(f_2)\cap\mathrm{Dom}(g_1)$ и что найдётся $\delta_1>0$ такое, что $|f_1(x)|\leqslant\alpha_1(x)|g_1(x)|$ для всех $x\in\Omega\cap\mathring{O}_{\delta_1}(a)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)=0$. Отсюда вытекает, что $|f_1(x)f_2(x)|\leqslant\alpha_1(x)|g_1(x)f_2(x)|$ для всех $x\in\Omega\cap\mathring{O}_{\delta_1}(a)$ и свойство 4 установлено.
Далее из равенства $f_2=o(g_1+f_1)$ вытекает существование $\delta_2>0$ такого, что $|f_2(x)|\leqslant\alpha_2(x)|g_1(x)+f_1(x)|$ для всех $x\in\Omega\cap\mathring{O}_{\delta_2}(a)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha_2(x)=0$. Но тогда для всех $x\in\Omega\cap\mathring{O}_\delta(a)$ при $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ в силу неравенства треугольника получим

$$|f_2(x)|\leqslant|\alpha_2(x)|(|g_1(x)|+|f_1(x)|)\leqslant|\alpha_2(x)|(\alpha_1(x)+1)|g_1(x)|=\beta(x)|g_1(x)|,$$

где $\beta(x):=|\alpha_2(x)|(\alpha_1(x)+1)\to 0$ при $x\to a$, что и завершает проверку свойства 7.

Теперь проверим свойство 8. Из равенства $f_1=o(f_2)$ получаем, что найдётся $\delta_1>0$ такое, что $|f_1(x)|\leqslant\alpha(x)|f_2(x)|$ для всех $x\in\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathring{O}_{\delta_1}(a)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Также найдётся $\delta_2\in(0,\delta]$ такое, что $g_1(x)\in\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathring{O}_{\delta_1}(a)$ при всех $x\in\mathrm{Dom}(g_1)\cap\mathring{O}_{\delta_2}(a)$, а следовательно и $|f_1\big(g_1(x)\big)|\leqslant\alpha\big(g_1(x)\big)|f_2\big(g_1(x)\big)|$. Так как $\lim\limits_{x\to a}\alpha\big(g_1(x)\big)=0$ по теореме 1.6 о пределе композиции и $\mathrm{Dom}(f_1\circ g_1)=\mathrm{Dom}(f_2\circ g_1)=\mathrm{Dom}(g_1)$, то $f_1\circ g_1=o(f_2\circ g_1)$ по определению 1 о-малого.

Свойства 1, 2, 3, 5 и 6 проверяются аналогично. ◀

Далее по определению 1 о-малого с использованием свойств степенной функции устанавливается следующая теорема.

Теорема 2 о свойствах о-малых для степенных функций. Пусть $n, m \in Z^+$ и во всех нижеследующих утверждениях предполагается, что о-малые рассматриваются в точке 0. Тогда

1. $x^{n+m} = o(x^n)$ при $m \geqslant 1$.
2. $f = o(x^{n+m}) \Rightarrow f = o(x^n)$.
3. $f = o(x^{n+m}) \Rightarrow \dfrac{f}{x^n} = o(x^m)$.

3.7 Два замечательных предела

Теорема 1 [О первом замечательном пределе]. Справедливо представление

$$\sin x = x + o(x^2) \tag{1}$$

при $x \to 0$. В частности

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2}$$

Доказательство. Из свойств тригонометрических функций вытекает $\big($см. (13)$\big)$ известное неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

для всех $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а значит

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

и

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{3}$$

для всех $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. В силу чётности функции cos и нечётности функции sin получим, что неравенство (3) верно также для всех $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. В силу непрерывности функции cos и равенства $\cos 0 = 1$ по принципу 1.3 двустроронней ограниченности получаем равенство (2), называемое **первым замечательным пределом**.

Далее из неравенства (3) получим

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$$

и

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x^2}{2},$$

а следовательно

$$0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x}{2} \tag{4}$$

для всех $x \in \mathring{O}_{\frac{\pi}{2}}(0)$. Используя первый замечательный предел (2), теорему 1.6 о пределе композиции и арифметические свойства 1.5 предела получим, что

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1,$$

отсюда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x}{2} = 1\cdot 0 = 0.$$

В силу принципа 1.3 двустроронней ограниченности из неравенства (4) заключаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2} = 0,$$

что равносильно равенству (1) по определению 6.1 о-малого. Теорема полностью доказана.
◀

Теорема 2 [О втором замечательном пределе].

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{5}$$

Доказательство. Для любого $t \geqslant 1$ в силу свойств степеней и установленному в теореме **??** для всех $n \in \mathbb{N}$ неравенству $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ имеем

$$\left(1+\frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]+1} < \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} < \left(1+\frac{1}{[t]}\right)^{[t]+2} < e\left(1+\frac{1}{[t]}\right)^2. \tag{6}$$

Так как $\mathbb{N} \ni [t] \to \infty$ при $1 \leqslant t \to +\infty$, то из доказательства теоремы **??** и арифметических свойств 2.1.3 предела последовательности вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]+1} = e\left(1+\frac{1}{[t]}\right)^2 = e,$$

поэтому в силу принципа 1.3 двустороннего ограничения имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e.$$

Из арифметических свойств 1.5 предела функции вытекает, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}}{1+\frac{1}{t}} = \frac{e}{1} = e.$$

Далее из арифметических свойств 1.5 предела и теоремы 1.6 о пределе композиции получим, что

$$e = e\cdot 1 = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right) = \{y = z-1 \to +\infty\} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right) =$$
$$= \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z}{z-1}\right)^z = \lim_{z\to+\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} = \{z=-t\to+\infty\} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t,$$

откуда в силу равенства $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$ и следует равенство (5) по теореме 1.6 о пределе композиции.

◀

3.8 Асимтотические представления некоторых элементарных функций

Теорема 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$\ln(1+x) = x + o(x), \tag{1}$$

$$e^x = 1 + x + o(x), \tag{2}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \tag{3}$$

при $x \to 0$, причём $o(0) = 0$ во всех формулах.

Доказательство. Используя второй замечательный предел (5) и непрервыность логарифмической функции в точке e, получим

$$1 = \ln e = \lim_{x\to 0} \ln\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x},$$

отсюда и вытекает равенство (1) по определению 6.1 о-малого. Используя неперывность экспоненты в нуле и теорему 1.6 о пределе композиции, получим

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \{x = e^t - 1 \to 0\} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(e^t)}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1},$$

а следовательно и

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

в силу арифметических свойств 1.5 предела, отсюда и вытекает равенство (2) по определению 6.1 о-малого. Используя свойства 6.1 о-малых, при $\alpha \neq 0$ получим

$$(1+\mathrm{x})^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)} \overset{(1)}{=} e^{\alpha x + \alpha o(x)} \xlongequal{(2),\text{ св-во } 8} 1 + \alpha x + \alpha o(x) + o\big(\alpha x + \alpha o(x)\big) \xlongequal{\text{св-во } 4}$$

$$\xlongequal{\text{св-во } 4} 1 + \alpha x + o(\alpha x) + o\big(\alpha x + o(\alpha x)\big) \xlongequal{\text{св-во } 7} 1 + \alpha x + o(\alpha x) + o(\alpha x) \xlongequal{\text{св-ва } 1,2} 1 + \alpha x + o(x),$$

а в случае $\alpha = 0$ равенство (3) тривиально. Теорема полностью доказана. ◄

Теорема 2.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x^2), \tag{5}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + o(1) \tag{6}$$

при $x \to 0$, причём $o(0) = 0$ в формулах (4) и (5).

Доказательство. Используя представление (1) для синуса и свойства 6.1, 6.2 о-малых, получим

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \xlongequal{(1),\text{ св-во } 8} 2\left(\frac{x}{2} + o\Big(\frac{x^2}{4}\Big)\right)^2 \xlongequal{\text{св-во } 2} 2\Big(\frac{x^2}{4} + xo(x^2) + o^2(x^2)\Big) \xlongequal{\text{св-ва } 4,6}$$

$$\xlongequal{\text{св-ва } 4,6} 2\Big(\frac{x^2}{4} + o(x^3) + o(x^4)\Big) \xlongequal{\text{св-во } 1} \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

и равенство (4) установлено. Далее

$$\frac{1}{\cos x} \overset{(4)}{=} \left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\right)^{-1} \overset{(3),\text{ св-во } 8}{=\!=\!=\!=} 1+\frac{x^2}{2}-o(x^3)+o\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) \overset{\text{св-ва } 7,2,1}{=\!=\!=\!=} 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

поэтому

$$\operatorname{tg} x=\sin x\frac{1}{\cos x}=\left(x+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \overset{\text{св-ва } 4,6,2,1 \text{ и Т. } 6.2}{=\!=\!=\!=\!=\!=} x+o(x^2)$$

и равенство (5) установлено. Также имеем

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x} \overset{(5)}{=} \frac{1}{x+o(x^2)} \overset{\text{Т. } 6.2}{=} \frac{1}{x}\big(1+o(x)\big)^{-1} \overset{(3)}{=} \frac{1}{x}\Big(1-o(x)+o\big(o(x)\big)\Big) \overset{\text{св-ва } 5,1}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\text{св-ва } 5,1}{=\!=\!=} \frac{1}{x}\big(1+o(x)\big) \overset{\text{Т. } 6.2}{=} \frac{1}{x}+o(1),$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 3.

$$\arcsin x = x+o(x^2), \tag{7}$$

$$\operatorname{arctg} x = x+o(x^2), \tag{8}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2}-x+o(x^2), \tag{9}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}-x+o(x^2) \tag{10}$$

при $x\to 0$, причём $o(0)=0$ во всех формулах.

Доказательство. Используя первый замечательный предел (2), непрерывность арксинуса в нуле и теорему 1.6 о пределе композиции, получим

$$1=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \overset{\{t=\arcsin x\to 0\}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x},$$

а следовательно и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

в силу арифметических свойств 1.5 предела, поэтому

$$\arcsin x = x+o(x) \tag{11}$$

по определению 6.1 о-малого. ◀

Снова используя непрерывность арксинуса в нуле и подставляя $t=\arcsin x$ в формулу

$$\sin t = t+o(t^2),$$

по свойству 8 о-малых получим, что

$$x=\arcsin x+o(\arcsin^2 x) \overset{(11)}{=} \arcsin x+o\Big(\big(x+o(x)\big)^2\Big) \overset{\text{св-ва } 4,6}{=\!=\!=\!=} \arcsin x+o\big(x^2+o(x^2)\big) \overset{\text{св-во } 7}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\text{св-во } 7}{=\!=\!=} \arcsin x+o(x^2)$$

при $x\to 0$ и равенство (7) установлено.

Совершенно аналогично устанавливается формула (8) для арктангенса. Формулы (9) и

(10) вытекают из формул
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,\ \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$
и формул (7), (8) соответственно.

Теорема 4. Пусть $a > 0, a \neq 1,\ b > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда
$$\log_a(x_0+h) = \log_a x_0 + \frac{1}{x_0 \ln a} h + o(h), \tag{12}$$
$$b^{x_0+h} = b^{x_0} + b^{x_0} \ln b\, h + o(h), \tag{13}$$
$$(x_0+h)^\alpha = x_0^\alpha + \alpha x_0^{\alpha-1} h + o(h) \text{ при } x_0 \neq 0, \tag{14}$$
$$\sin(x_0+h) = \sin x_0 + \cos x_0\, h - \frac{\sin x_0}{2} h^2 + o(h^2), \tag{15}$$
$$\cos(x_0+h) = \cos x_0 - \sin x_0\, h - \frac{\cos x_0}{2} h^2 + o(h^2), \tag{16}$$
$$\operatorname{tg}(x_0+h) = \operatorname{tg} x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0} h + \frac{\sin x_0}{\cos^3 x_0} h^2 + o(h^2), \tag{17}$$
$$\operatorname{ctg}(x_0+h) = \operatorname{ctg} x_0 - \frac{1}{\sin^2 x_0} h + \frac{\cos x_0}{\sin^3 x_0} h^2 + o(h^2), \tag{18}$$
где точки x_0, x_0+h принадлежат области определения соответствующей функции и $h \to 0$.

Доказательство. Используя результаты теорем 1 и 2, а также свойства 6.1 о-малых, получим
$$\log_a(x_0+h) = \frac{\ln(x_0+h)}{\ln a} = \frac{\ln x_0 + \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\ln a} \overset{(1)}{=} \frac{\ln x_0}{\ln a} + \frac{\frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)}{\ln a} = \log_a x_0 + \frac{1}{x_0 \ln a} h + o(h),$$
$$b^{x_0+h} = b^{x_0} e^{h \ln b} \overset{(2)}{=} b^{x_0}\big(1 + h\ln b + o(h \ln b)\big) = b^{x_0} + b^{x_0} \ln b\, h + o(h)$$
и
$$(x_0+h)^\alpha = x_0^\alpha \left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha \overset{(3)}{=} x_0^\alpha\left(1 + \frac{\alpha h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)\right) = x_0^\alpha + \alpha x_0^{\alpha-1} h + o(h),$$
если $x_0 \neq 0$. Таким образом, равенства (12)-(14) установлены. Равенство (15) вытекает из соотношений
$$\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h \overset{(1),(4)}{=} \sin x_0\big(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\big) + \cos x_0\big(h + o(h^2)\big) =$$
$$= \sin x_0 + \cos x_0\, h - \frac{\sin x_0}{2} h^2 + o(h^2),$$
равенство (16) устанавливается аналогично. Далее проверим равенство (17):
$$\operatorname{tg}(x_0+h) - \operatorname{tg} x_0 = \frac{\operatorname{tg} x_0 + \operatorname{tg} h}{1 - \operatorname{tg} x_0 \operatorname{tg} h} - \operatorname{tg} x_0 = \frac{(\operatorname{tg}^2 x_0 + 1)\operatorname{tg} h}{1 - \operatorname{tg} x_0 \operatorname{tg} h} \overset{(5)}{=}$$
$$\overset{(5)}{=} \frac{1}{\cos^2 x_0} \frac{h + o(h^2)}{1 - \operatorname{tg} x_0\, h - \operatorname{tg} x_0\, o(h^2)} \overset{(3)}{=} \frac{1}{\cos^2 x_0}\big(h + o(h^2)\big)\Big(1 + \operatorname{tg} x_0\, h + o(h^2) + o\big(-\operatorname{tg} x_0\, h - o(h^2)\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x_0}\big(h + o(h^2)\big)\big(1 + \operatorname{tg} x_0\, h + o(h)\big) = \frac{1}{\cos^2 x_0}\big(h + \operatorname{tg} x_0\, h^2 + o(h^2)\big) = \frac{1}{\cos^2 x_0} h + \frac{\sin x_0}{\cos^3 x_0} h^2 + o(h^2).$$

Равенство (18) устанавливается аналогично. ◀

3.9 Равномерная непрерывность

Определение 1. Функция f называется **равномерно непрерывной** на множестве $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in \Omega$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Из определения 1 непосредственно вытекает, что если функция f равномерно непрерывна на некотором множестве, то она равномерно непрерывна на любом его подмножестве.

Замечание 2. Если функция f равномерно непрерывна на некотором множестве Ω, то $f \in C(\Omega)$. Для проверки этого факта достаточно в определении 1 зафиксировать произвольную точку $x_1 \in \Omega$, тогда по определению 2.1 (Коши) получим, что функция $f\big|_\Omega$ непрерывна в точке x_1.

Утверждение 1 [Линейная комбинация равномерно непрерывных функций равномерно непрерывна]. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и функции f, g равномерно непрерывны на некотором множестве Ω. Тогда функция $\alpha f + \beta g$ равномерно непрерывна на Ω.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 1 найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_2$. В силу неравенства треугольника получим

$$|\alpha f(x_1) + \beta g(x_1) - \alpha f(x_2) - \beta g(x_2)| \leqslant |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| + |\beta g(x_1) - \beta g(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, что и завершает доказательство утверждения. ◀

Утверждение 2. Если функция f равномерно непрерывна на *ограниченном* множестве Ω, то она ограничена на Ω.

Доказательство. Так как множество Ω ограничено, то найдётся отрезок $[a, b] \supset \Omega$. Пусть функция f не ограничена на Ω. По индукции строится последовательность x_n точек Ω такая, что $|f(x_{n+1})| > |f(x_n)| + 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $x_n \in \Omega \subset [a, b]$ ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса найдётся сходящаяся её подпоследовательность $x_{n_k} \to \xi \in \mathbb{R}$ при $k \to \infty$. По определению 1 для $\varepsilon := 1$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(y)| < 1$ для всех $x, y \in \Omega$ таких, что $|x - y| < \delta$. Так как

$x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \to \xi - \xi = 0$ при $k \to \infty$, то найдётся $K \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_{n_{K+1}} - x_{n_K}| < \delta$. Так как $n_{K+1} \geqslant n_K + 1$, то по неравенству треугольника получим

$$|f(x_{n_{K+1}}) - f(x_{n_K})| \geqslant |f(x_{n_{K+1}})| - |f(x_{n_K})| \geqslant |f(x_{n_K+1})| - |f(x_{n_K})| > 1,$$

что противоречит равномерной непрерывности функции f на Ω. ◀

Утверждение 3. Пусть Ω — *ограниченное* множество и функции f, g равномерно непрерывны на Ω. Тогда их произведение fg равномерно непрерывно на множестве Ω.

Доказательство. По утверждению 2 функции f и g ограничены на множестве Ω, а значит найдётся $M > 0$ такое, что $|f(x)| < M$ и $|g(x)| < M$ для всех $x \in \Omega$. По определению 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_2$. Тогда

$$|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| = |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_1)||g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)||f(x_1) - f(x_2)| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, что и означает равномерную непрерывность функции fg на множестве Ω. ◀

Теорема 1 (Кантор–Гейне). Пусть $f \in C[a, b]$, тогда функция f *равномерно непрерывна* на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Пусть функция f не равномерно непрерывна на $[a, b]$, тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при $\delta_n := 1/n$ найдутся последовательности $x'_n, x''_n \in [a, b]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta_n \to 0$ и при этом $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В силу ограниченности последовательности x'_n, по тоеореме Больцано-Вейерштрасса существует её сходящаяся подпоследовательность $x'_{n_k} \to \xi \in [a, b]$ при $k \to \infty$. Так как $n_k \geqslant k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$-\frac{1}{k} \leqslant -\frac{1}{n_k} < x''_{n_k} - x'_{n_k} < \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{k},$$

поэтому

$$\xi \leftarrow x'_{n_k} - \frac{1}{k} < x''_{n_k} < x'_{n_k} + \frac{1}{k} \to \xi,$$

а значит $x''_{n_k} \to \xi$ при $k \to \infty$ по принципу 1.3 двустороннего ограничения. Так как $f \in C[a, b]$, то $f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k}) \to f(\xi)$ при $k \to \infty$ в силу определения 2.1′ (Гейне), а следовательно $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \to f(\xi) - f(\xi) = 0$, что противоречит неравенству $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$, верному для всех $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 1′ (Кантор–Гейне). Пусть $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \geqslant \delta\}$, $f \in C(\Omega)$ и существует $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, тогда функция f *равномерно непрерывна* на Ω.

Доказательство. Пусть функция f не равномерно непрерывна на Ω, тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при $\delta_n := 1/n$ найдутся последовательности $x'_n, x''_n \in \Omega$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta_n \to 0$ и при этом $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть последовательность x'_n ограничена, то есть $\exists M > 0 : |x'_n| \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|x''_n| \leqslant |x''_n - x'_n| + |x'_n| \leqslant \frac{1}{n} + M \leqslant M + 1$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что все элементы последовательностей x'_n, x''_n лежат в пересечении множества Ω и отрезка с центром в нуле, которое само является либо отрезком, либо объединением двух непересекающихся отрезков. Так как $|x'_n - x''_n| \to 0$, то найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что элементы x'_n, x''_n лежат на одном и том же отрезке $I \subset \Omega$ при всех $n \geqslant N$. Так как $f \in C(\Omega)$, то $f \in C(I)$ и функция f равномерно непрерывна на I по теореме 1 Кантора–Гейне, что противоречит нашему построению.

б) Пусть последовательность x'_n не ограничена, то есть найдётся её подпоследовательность $x'_{n_p} : |x'_{n_p}| \xrightarrow{p\to\infty} +\infty$. Но тогда

$$|x''_{n_p}| \geqslant |x'_{n_p}| - |x'_{n_p} - x''_{n_p}| \geqslant |x'_{n_p}| - 1 \xrightarrow{p\to\infty} +\infty,$$

отсюда в силу определения 1.2′ (Гейне) (см. замечание 1.1) имеем $f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}) \to b - b = 0$ при $p \to \infty$, что противоречит неравенству $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$, верному для всех $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. ◀

4. Дифференцируемость функции одной переменной

4.1 Основные определения и свойства

Определение 1 дифференцируемости. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и $O_\delta(x_0) \subset \mathrm{Dom}(f)$. Функция f называется **дифференцируемой в точке** x_0, если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $h \in O_\delta(0)$ выполнено равенство

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h) \tag{1}$$

при $h \to 0$, где (см. определение 3.6.1) $|o(h)| \leqslant \alpha(h)|h|$ и $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Функцию α всегда будем доопределять по непрерывности в точке $h = 0$, полагая $\alpha(0) := 0$. При этом *линейная функция* $h \mapsto Ah : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **дифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается символом $df(x_0)$. Применяя функцию $df(x_0)$ к некоторому $h \in \mathbb{R}$, вместо $df(x_0)(h)$ будем также использовать обозначение $df(x_0, h)$ или $df(x_0)h$.

Определение 2. Функция f называется **дифференцируемой на множестве** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она дифференцируема в каждой точке множества Ω. Класс всех таких функций обозначим $D(\Omega)$. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют **дифференцируемой**. Также условимся вместо $D(\{x_0\})$, $D\big((a,b)\big)$, $D([a,b])$ пользоваться упрощёнными обозначениями $D(x_0)$, $D(a,b)$, $D[a,b]$.

Определение 3 производной. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $O_\delta(x_0) \subset \mathrm{Dom}(f)$ и существует

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

тогда число $f'(x_0)$ называется **производной** функции f в точке x_0.

Утверждение 1 о единственности производной. Если производная функции f определена в точке x_0, то она определена однозначно.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из утверждения 3.1.1 о единственности предела. ◀

Теорема 1 о равносильности дифференцируемости существованию производной. Функция f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ существует $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. При выполнении любого из этих двух условий $df(x_0, h) = f'(x_0)h$ для всех $h \in \mathbb{R}$ и дифференциал (см. определение 1) функции f в точке x_0 определён однозначно.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из определения 3.6.1 о-малого и утверждения 1 о единственности производной. ◀

Утверждение 2. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Переходя в (1) к пределу при $h \to 0$, имеем
$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0),$$
что и означает непрерывность функции f в точке x_0 в силу замечания 3.2.1. ◀

Следствие 1 утверждения 2. Для любого любого множества $\Omega \subset \mathbb{R}$ выполнено $D(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Замечание 1 о правой и левой производных. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. **Правой** производной в точке a называется число
$$f'_+(a) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \in \mathbb{R},$$
левой производной в точке b называется число
$$f'_-(b) := \lim_{h\to 0-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x\to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} \in \mathbb{R}.$$
Также в точках a и b даётся определение дифференцируемости справа и слева, аналогичное определению 1 при $h > 0$ и $h < 0$ соответственно. Затем доказывается аналог теоремы 1 о равносилнльности дифференцируемости функции f в точке a справа (в точке b слева) существованию правой (левой) производной функции f в точке a или b соответственно. Как и в утверждении 2 получим, что из дифференцируемости функции f в точке a справа вытекает её непрерывность в точке a, из дифференцируемости функции f в точке b слева вытекает её непрерывность в точке b. Из свойств предела (см. замечание 3.1.2) для любой функции g вытекает, что $g'(x_0) = A \Leftrightarrow O_\delta(x_0) \subset \mathrm{Dom}(g)$ для некоторого $\delta > 0$ и $g'_-(x_0) = g'_+(x_0) = A$.

Под $D[a, b]$ также часто понимают класс всех функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, что $f \in D(a, b)$ и существуют $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$. Так как любую такую функцию можно доопределить на множествах $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$ при помощи линейных функций так, что доопределённая функция принадлежит классу $D(\mathbb{R})$, то всё множество таких функций совпадает со множеством функций из $D[a, b]$ (см. определение 2), суженных на отрезок $[a, b]$.

Теорема 2 о производных простейших элементарных функций. Пусть $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда существуют
$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}, \tag{3}$$
$$(b^x)' = b^x \ln b \tag{4}$$
$$((x)^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ при } x \neq 0, \tag{5}$$
$$\sin' x = \cos x, \tag{6}$$

$$\cos' x = -\sin x, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{8}$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{9}$$

во всех точках x, принадлежащих области определения соответствующей функции. Также

$$\begin{gathered} (x^\alpha)'\big|_{x=0} = 0 \text{ при } \alpha = \frac{p}{2k-1} > 1,\ k \in \mathbb{N},\ 2k-1 < p \in \mathbb{N}, \\ (x^\alpha)'_+\big|_{x=0} = 0 \text{ при } 1 < \alpha \in \mathbb{R}, \\ x'|_{x=0} = 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Доказательство. Наличие дифференцируемости и справедливость формул (3)-(9) непосредственно вытекают из определения 1, теоремы 3.8.4 и теоремы 1. Формулы (10) вытекают из равенства

$$\frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1},$$

свойств степенной функции (см. раздел 3.5.1), определения 3 производной и замечания 1 о правой и левой производных. ◀

Теорема 3 о дифференцируемости композиции функций. Пусть функция f дифференцируема в точке $g_0 := g(x_0)$, а функция $g\colon \operatorname{Dom}(g) \to \operatorname{Dom}(f)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда функция $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0) = f'(g_0)g'(x_0),$$

что равносильно

$$d(f \circ g)(x_0) = df\big(g(x_0)\big) \circ dg(x_0) = df(g_0) \circ dg(x_0).$$

Доказательство. По определению 1 имеем:

$$f(g_0 + z) = f(g_0) + Az + u(z), \tag{11}$$

$$g(x_0 + h) = g_0 + Bh + v(h), \tag{12}$$

где $A = f'(g_0)$, $B = g'(x_0)$ по теореме 1 и $|u(z)| \leqslant \alpha(z)|z|$, $|v(h)| \leqslant \beta(h)|h|$, $\lim\limits_{z\to 0} \alpha(z) = 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \beta(h) = 0$. Таким образом,

$$\begin{gathered} f\big(g(x_0 + h)\big) \overset{(12)}{=} f\big(g_0 + Bh + v(h)\big) \overset{(11)}{=} f(g_0) + A\big(Bh + v(h)\big) + u\big(Bh + v(h)\big) = \\ = f(g_0) + ABh + r(h), \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} |r(h)| = \big|Av(h) + u\big(Bh + v(h)\big)\big| \leqslant |Av(h)| + \big|u\big(Bh + v(h)\big)\big| \leqslant \\ \leqslant |A|\beta(h)|h| + \overbrace{\alpha\big(Bh + v(h)\big)}^{\gamma(h)}|Bh + v(h)| \leqslant |A|\beta(h)|h| + \gamma(h)(|B||h| + \beta(h)|h|), \end{gathered}$$

где $\lim\limits_{h\to 0} \gamma(h) = \lim\limits_{h\to 0} \alpha\big(Bh + v(h)\big) = 0$ по теореме 3.2.4′ о непрерывности композиции. Таким образом $|r(h)| \leqslant \delta(h)|h|$, где

$$\delta(h) := |A|\beta(h) + |B|\gamma(h) + \gamma(h)\beta(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

в силу арифметических свойств 3.2.3′ непрерывных функций. По определению 3.6.1 о-малого это означает, что $r(h) = o(h)$ и теорема полностью доказана в силу определения 1 и теоремы 1. ◀

Следствие 2 теоремы о дифференцируемости композиции функций. Инвариантность формы первого дифференциала.

Пусть dx и dg — *числа* и $f \in D(g_0)$. Тогда

$$df(g_0, dg) \overset{\text{Т. 1}}{=} f'(g_0)dg. \tag{13}$$

Теперь пусть $g\colon \mathrm{Dom}(g) \to \mathrm{Dom}(f)$ — *функция*, $g \in D(x_0)$ и $g(x_0) = g_0$. Тогда

$$d(f\circ g)(x_0, dx) \overset{\text{Т. 3}}{=} \underline{df\big(g_0, dg(x_0, dx)\big)} = \underline{f'(g_0)dg(x_0, dx)}.$$

Опуская в подчёркнутых выражениях аргументы (x_0, dx), получим для $d(f\circ g)$ представление, аналогичное представлению (13) для df в случае, когда аргумент функции f *обозначен буквой* g. Совпадение этих представлений и называется **инвариантностью формы первого дифференциала**. ◀

Теорема 4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями. Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $\alpha f + \beta g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (в случае, если $g(x_0) \neq 0$) дифференцируемы в точке x_0 при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причём верны равенства:

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \tag{14}$$

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0), \tag{15}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{16}$$

Доказательство. Используя определение 1, теорему 1 и свойства 3.6.1, 3.6.2 о-малых, для некоторого $\delta > 0$ и любого $h \in O_\delta(0)$ получим равенства

$$(\alpha f + \beta g)(x_0 + h) - (\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) + \beta\big(g(x_0+h) - g(x_0)\big) \overset{\text{О. 1, Т. 1}}{=\!=\!=} \\ \overset{\text{О. 1, Т. 1}}{=\!=\!=} \alpha f'(x_0)h + \beta g'(x_0)h + \alpha o(h) + \beta o(h) \overset{\text{Т. 3.6.1}}{=\!=\!=} \big(\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)\big)h + o(h)$$

и

$$f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0) \overset{\text{О. 1, Т. 1}}{=\!=\!=} \big(f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)\big)\big(g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)\big) - \\ -f(x_0)g(x_0) = \big(f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big)h + f'(x_0)g'(x_0)h^2 + \big(f(x_0) + f'(x_0)h\big)o(h) + \\ + \big(g(x_0) + g'(x_0)h\big)o(h) + o(h)o(h) \overset{\text{Т. 3.6.1}}{=\!=\!=} \big(f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big)h + f'(x_0)g'(x_0)h^2 + \\ + o(h) + o(h^2) \overset{\text{Т. 3.6.2 и 3.6.1}}{=\!=\!=\!=} \big(f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big)h + o(h),$$

из которых соответственно вытекают равенства (14) и (15).

Если $g(x_0) \neq 0$, то функция $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ дифференцируема в точке $g(x_0)$ по теореме 2, а следовательно функция $\dfrac{1}{g}$ дифференцируема в точке x_0 по теореме 3 о дифференцируемости композиции, причём

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{1}{t}\circ g\right)'(x_0) \overset{\text{Т. 3 и 2}}{=\!=\!=} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

поэтому

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) \overset{(15)}{=} f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) + \frac{1}{g(x_0)}f'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

и равенство (16) установлено. ◄

Определение 4. Пусть функция $f \in D(x_0)$ и $y_0 := f(x_0)$, тогда прямая

$$l : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

называется **касательной прямой** к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4.2 Производные высших порядков

Замечание 1 об операторе дифференцирования. Обозначим через $\Omega := \{f : \mathbb{R} \supset \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}\}$ **множество всех функций, действующих из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$** *(с различными областями определения)*. Определение 1.3 производной доставляет нам **функцию** $D\colon \Omega \to \Omega$, *определённую на всём* Ω и переводящую любую функцию $f \in \Omega$ в функцию $D(f) := f' \in \Omega$ (при этом $\mathrm{Dom}(f') \subset \mathrm{Dom}(f)$ и для гиперконтинуального семейства функций имеем $\mathrm{Dom}(f') = \varnothing$).

Определение 1. **Производной порядка k** $\in \mathbb{N}$ (или просто **k-ой производной**) функции f называется функция

$$f^{(k)} := \underbrace{(D \circ \ldots \circ D)}_{k \text{ раз}}(f).$$

Функция f называется **k раз дифференцируемой в точке** x_0, если $x_0 \in \mathrm{Dom}(f^{(k)})$. Заметим, что $f^{(1)} := D(f) := f'$, а также определим $f^{(0)} := f$.

Определение 2. Функция f называется **k раз дифференцируемой на множестве** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она k раз дифференцируема в каждой точке множества Ω. Класс всех таких функций обозначим $D^k(\Omega)$. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют **k раз дифференцируемой**. Также по определению положим $D^0(\Omega) := C(\Omega)$ и условимся вместо $D^k(\{x_0\})$, $D^k\big((a,b)\big)$, $D^k([a,b])$ пользоваться упрощёнными обозначениями $D^k(x_0)$, $D^k(a,b)$, $D^k[a,b]$.

Замечание 2. Для k раз дифференцируемой в точке x_0 функции f в силу равенства $f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'$ и определения 1.3 производной получим $f \in D^{k-1}\big(O_\delta(x_0)\big)$ для некоторого

$\delta > 0$ и $f^{(k-1)} \in D(x_0)$.

Замечание 3. Используя *ассоциативность композиции функций*, получим $f^{(k)} = (f^{(k-p)})^{(p)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $p \in \overline{0,k}$.

Определение 3. Для произвольного множества $\Omega \subset \mathbb{R}$ при $k \in \mathbb{N}$ обозначим $C^k(\Omega)$ класс всех функций $f \in D^k(\Omega)$ таких, что $f^{(k)} \in C(\Omega)$. Также по определению положим $C^0(\Omega) := C(\Omega)$ и $C^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$.

Утверждение 1. Для любого множества Ω и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$C^k(\Omega) \subset D^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $f \in D^k(\Omega)$ и $x_0 \in \Omega$. Так как $f^{(k-1)} \in D(x_0)$, то функция $f^{(k-1)}$ определена в $O_\delta(x_0)$ для некоторого $\delta > 0$ и непрерывна в точке x_0 по утверждению 1.2, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$f^{(k-1)}\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f^{(k-1)}(x_0)\big).$$

Отсюда и подавно

$$f^{(k-1)}\big(O_\delta(x_0) \cap \Omega\big) \subset O_\varepsilon\big(f^{(k-1)}(x_0)\big),$$

что в силу произвольности $x_0 \in \Omega$ влечёт $f^{(k-1)} \in C(\Omega)$. Таким образом $f \in C^{k-1}(\Omega)$ по определению 2.3 и вложение $D^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega)$ установлено. Вложение $C^k(\Omega) \subset D^k(\Omega)$ верно по определению 2.3. ◀

Теорема 1 [Формула Лейбница]. Пусть $f, g \in D^n(x_0)$, $n \in N$. Тогда $fg \in D^n(x_0)$ и верна **формула Лейбница**

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0), \tag{1}$$

где C_n^k — *биномиальные коэффициенты* (см. определение **??**).

Доказательство идейно повторяет вывод формулы бинома Ньютона (см. теорему 2.1.4). При $n = 0$ формула (1) обращается в тождество $f(x_0)g(x_0) = f(x_0)g(x_0)$. Пусть она верна для некоторого $n \in \mathbb{Z}^+$ и $f, g \in D^{n+1}(x_0)$. По предположению индукции это означает, что формула (1) верна при замене x_0 на произвольное число x, для которого её правая часть определена, что в силу дифференцируемости в точке x_0 всех функций $f^{(n-k)}$, $g^{(k)}$, входящих в правую часть, влечёт дифференцируемость функции $(fg)^{(n)}$ в точке x_0 по теореме 1.4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями, то есть $fg \in D^{n+1}(x_0)$. Используя эту теорему, а также свойство биномиальных коэффициентов (см. утверждение

2.1.2), получим

$$(fg)^{(n+1)}(x_0) := \Big((fg)^{(n)}\Big)'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x_0)g^{(k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0)g^{(k+1)}(x_0) =$$

$$= f^{(n+1)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x_0)g^{(k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(n-k)}(x_0)g^{(k+1)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0) \overset{\{m=k+1\}}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\{m=k+1\}}{=\!=\!=} f^{(n+1)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x_0)g^{(k)}(x_0) + \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} f^{(n-m+1)}(x_0)g^{(m)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0) =$$

$$= f^{(n+1)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n}(C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n-k+1)}(x_0)g^{(k)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0) =$$

$$= f^{(n+1)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(n-k+1)}(x_0)g^{(k)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x_0)g^{(k)}(x_0).$$

Таким образом, формула (1) Лейбница доказана по индукции. ◀

Теорема 2 [Композиция функций класса $\mathrm{D^k}$ является функцией класса $\mathrm{D^k}$]. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $g \in D^k(x_0)$, $f \in D^k\big(g(x_0)\big)$. Тогда $f \circ g \in D^k(x_0)$.

Доказательство. При $k = 1$ утверждение теоремы следует из теоремы 1.3 о дифференцируемости композиции. Пусть утверждение теоремы верно для некоторого $k - 1 \geqslant 1$, проверим его для k. По теореме 1.3 о дифференцируемости композиции имеет место равенство

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) = \big((f' \circ g)g'\big)(x) \tag{2}$$

для всех x, в которых его правая часть определена. Так как $f \in D^k\big(g(x_0)\big)$, то $f' \in D^{k-1}\big(g(x_0)\big)$ в силу замечания 3, также имеем $g \in D^k(x_0) \subset D^{k-1}(x_0)$. Таким образом, в силу предположения индукции имеем $f' \circ g \in D^{k-1}(x_0)$. Так как $g' \in D^{k-1}(x_0)$, то $(f' \circ g)g' \in D^{k-1}(x_0)$ по теореме 1. В силу равенства (2) это означает, что $(f \circ g)' \in D^{k-1}(x_0)$, что равносильно $f \circ g \in D^k(x_0)$ (см. замечание 3) и теорема полностью доказана. ◀

Следствие 1 теоремы 2. Пусть $g \in D^k(x_0)$ и $g(x_0) \neq 0$. тогда

$$\frac{1}{g} \in D^k(x_0).$$

Дествительно, рассмотрев функцию

$$t \mapsto \frac{1}{t} \in C^\infty\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \subset D^k\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \subset D^k\big(g(x_0)\big),$$

получим

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{t} \circ g \in D^k(x_0)$$

по теореме 2. ◀

Теорема 3 [Композиция функций класса $\mathrm{C^k}$ является функцией класса $\mathrm{C^k}$]. Пусть $k \in \mathbb{Z}^+$, $g \in C^k(\Omega)$, $g(\Omega) \subset \Omega'$, $f \in C^k(\Omega')$. Тогда $f \circ g \in C^k(\Omega)$.

Доказательство. При $k = 0$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.2.4 о непрерывности композиции. Пусть $k \geqslant 1$ и теорема верна для $k-1$. Тогда для всех $x \in \Omega$ справедливо равенство (2), причём $f' \in C^{k-1}(\Omega')$ и $g \in C^k(\Omega) \overset{\text{Утв. } 1}{\subset} C^{k-1}(\Omega)$, а следовательно $f' \circ g \in C^{k-1}(\Omega)$ по предположению индукции. Так как $g' \in C^{k-1}(\Omega)$, то из формулы (1) Лейбница и теоремы 3.2.3′ об арифметических операциях над непрерывными функциями вытекает, что $(f' \circ g)g' \in C^{k-1}(\Omega)$, поэтому в силу равенства (2) имеем $(f \circ g)' \in C^{k-1}(\Omega)$, что равносильно $f \circ g \in C^k(\Omega)$. ◀

4.3 Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 1. Пусть $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$). Тогда найдётся $\delta > 0$ такое, что $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $\big(f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)\big)$

Доказательство. Пусть $f'(x_0) > 0$ (случай $f'(x_0) < 0$ рассматривается аналогично), тогда по определению 1.3 производной найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_1}(x_0) \subset \mathrm{Dom}(f)$ выполнено

$$f(x) - f(x_0) = \big(f'(x_0) + o(1)\big)(x - x_0) \tag{1}$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f'(x_0) + o(1)\big) = f'(x_0) > 0$. Это означает, что найдётся $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполнено неравенство $f'(x_0) + o(1) > 0$, а значит и равенство

$$\mathrm{sgn}\big(f(x) - f(x_0)\big) = \mathrm{sgn}(x - x_0),$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Определение 1. Точка $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ называется **точкой (строгого) локального минимума функции** f, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ $\big(f(x_0) < f(x)\big)$ для всех $x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Определение 2. Точка $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ называется **точкой (строгого) локального максимума функции** f, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ $\big(f(x_0) > f(x)\big)$ для всех $x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Определение 3. Точки, доставляемые определениями 1 и 2, называются **точками экстремума функции** f.

Теорема 2 о необходимом условии экстремума [Лемма Ферма]. Если функция f дифференцируема в точке экстремума x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 1 из неравенства $f'(x_0) > 0$ или $f'(x_0) < 0$ вытекает, что точка x_0 не является точкой экстремума. Это и означает, что $f'(x_0) = 0$. ◀

Теорема 3 (Дарбу). Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in D[a,b]$. Тогда для любого числа y, лежащего между числами $f'(a)$ и $f'(b)$, найдётся точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi) = y$.

Доказательство. Для начала рассмотрим случай, когда $f'(a)f'(b) < 0$ и докажем существование точки $\xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$. Пусть $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$ (случай $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ рассматривается аналогично). Так как $f \in C[a,b]$, по второй теореме Вейерштрасса 3.2.5 найдётся точка $\xi \in [a,b] : f(\xi) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, при этом $\xi \neq a$ и $\xi \neq b$ по теореме 1, а значит $\xi \in (a,b)$. Из теоремы 2 вытекает, что $f'(\xi) = 0$.

Общий случай сводится к уже рассмотренному при помощи функции $F(x) := f(x) - yx$. Так как $F'(a)F'(b) = (f'(a) - y)(f'(b) - y) < 0$, то найдётся точка $\xi \in (a,b) : 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - y$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 4 (Ролль). Пусть

1) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;
2) функция f дифференцируема на интервале (a,b) и непрерывна во всех *конечных* точках отрезка $[a,b]$;
3) $f(a) = f(b) \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, где под $f(\pm\infty)$ понимается $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Тогда существует $\xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$. Так как $\lim\limits_{\mathbf{x}\to-\infty} f(x) = f(b) \in \mathbb{R}$, то функция f ограничена на $(-\infty, b]$. Действительно, в противном случае нашлась бы последовательность x_n такая, что $|f(x_n)| \to +\infty$, что в силу теоремы **??** Больцано-Вейерштрасса влечёт существование её сходящейся подпоследовательности $x_{n_k} \to x_0 \in [-\infty, b]$. Это противоречит непрерывности функции f на $(-\infty, b]$ и конечности её предела на $-\infty$. Далее из ограниченности функции f на $(-\infty, b]$ вытекает $\exists \sup\limits_{x\in(-\infty,b]} f(x) =: M \in \mathbb{R}$, $\exists \inf\limits_{x\in(-\infty,b]} f(x) =: m \in \mathbb{R}$. Если $M = m$, то $f(x) \equiv M = const$ на $(-\infty, b]$ и $f'(\xi) = 0$ для всех $\xi \in (-\infty, b)$. Если $M \neq m$, то либо $M \neq f(b)$, либо $m \neq f(b)$.

Пусть $M \neq f(b)$ (случай $m \neq f(b)$ рассматривается аналогично). По определению 3.3 супремума найдётся последовательность $x_n \in (-\infty, b] : f(x_n) \to M$, из которой по теореме **??** Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to \xi \in [-\infty, b]$. Так как в рассматриваем случае $\xi \in (-\infty, b)$, то $f(\xi) = M = \max\limits_{x\in(-\infty,b]} f(x)$, а значит $f'(\xi) = 0$ по лемме 2 Ферма. Для рассмотренного случая утверждение теоремы доказано.

В случае, когда $a = -\infty$, $b = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$ аналогичным образом доказывается существование точки $\xi \in \mathbb{R} : f(\xi) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}}(\max\limits_{x\in\mathbb{R}}) f(x)$, а значит $f'(\xi) = 0$ по лемме 2 Ферма. Остальные случаи рассматриваются аналогично. ◀

Теорема 5 (Коши). Пусть

1) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;
2) функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и непрерывны во всех *конечных*

точках отрезка $[a,b]$;

3) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$;

4) если $a = -\infty$, то $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =: f(a) \in \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) =: g(a) \in \mathbb{R}$; если $b = +\infty$, то $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =: f(b) \in \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =: g(b) \in \mathbb{R}$.

Тогда существует $\xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию F, определённую во всех *конечных* точках $x \in [a,b]$ равенством

$$F(x) := \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x).$$

Так как $F(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = F(b)$, то функция F удовлетворяет на отрезке $[a,b]$ всем условиям теоремы 4 Ролля, а значит $\exists \xi \in (a,b)$:

$$0 = F'(\xi) = \big(f(b)-f(a)\big)g(\xi) - \big(g(b)-g(a)\big)f(\xi).$$

Из этого равенства с учётом того, что $g(a) \neq g(b)$ по условию 3) и теореме 4 Ролля, получим равенство (2). ◀

Теорема 6 (Лагранж). Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ и $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$, тогда существует $\xi \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 5 Коши при $g(x) := x$. ◀

Следствие 1 теоремы Лагранжа. Пусть I — произвольный *промежуток*, $f \in D\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C(I)$ и $f'(x) \equiv 0$ для всех $x \in \operatorname{int}(I)$ (см. определение 1.4.5), тогда $f(x) \equiv const$ для всех $x \in I$.

Доказательство. Зафиксировав произвольную точку $x_0 \in I$, получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) = f(x_0) + 0(x-x_0) = f(x_0)$$

для всех $x_0 \neq x \in I$ по теореме 6 Лагранжа в силу того, что $\xi \in \operatorname{int}(I)$. ◀

Следствие 2 теоремы Лагранжа.

Пусть I — произвольный промежуток и $f \in D\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C(I)$. Тогда

$f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) для всех $x \in \operatorname{int}(I) \Leftrightarrow f$ не убывает (не возрастает) на I;

$f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in \operatorname{int}(I) \Rightarrow f$ возрастает (убывает) на I.

Доказательство.

Если f не убывает на I, то по теореме 1 не может существовать точки $x \in \operatorname{int}(I)$ такой, что $f'(x) < 0$.

Если $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) > 0$) для всех $x \in \operatorname{int}(I)$, то по теореме 6 Лагранжа для всех $x_1, x_2 \in I$ при $x_1 < x_2$ найдётся $\xi \in \operatorname{int}(I)$ такое, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant (>)\ 0,$$

поэтому функция f не убывает (возрастает) на I. Случай невозрастающей (убывающей) функции f рассматривается аналогично (или сводится к предыдущему рассмотрением функции $-f$). ◀

Утверждение 1. Пусть I — произвольный *промежуток*, $f \in D\big(\mathrm{int}(I)\big) \cap C(I)$ и $|f'(x)| \leqslant M$ при некотором $M > 0$ для всех $x \in \mathrm{int}(I)$ (см. определение 1.4.5). Тогда функция f *равномерно непрерывна* (см. определение 3.9.1) на I.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по теореме 6 Лагранжа получим

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leqslant M\delta < \varepsilon$$

для всех $x_1, x_2 \in I$ таких, что $0 < |x_1 - x_2| < \delta := \varepsilon/M$. Таким образом функция f равномерно непрерывна на I по определению 3.9.1. ◀

Теорема 7 (Бернулли) или [Правило Лопиталя]. Пусть

1) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $c \in \{a, b\}$ и $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$;
2) $f, g \in D(a, b)$;
3) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$;
4) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Кроме того, пусть выполнено одно из следующих условий:

5а) $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$;
5б) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$.

Тогда

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказательство.

5а). Рассмотрим случай $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ (случаи $c = \pm\infty$, $A = \pm\infty$ рассматриваются аналогично). Пусть $\varepsilon > 0$. Из условия 4) вытекает существование $y_0 \in (a, b)$ такого, что

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $\xi \in (a, b)$ таких, что $|\xi - c| < |y_0 - c|$. По теореме 5 Коши имеем

$$\left|\frac{f(x) - f(y_0)}{g(x) - g(y_0)} - A\right| \overset{\text{T.5}}{=} \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \in (a, b)$ таких, что $|x - c| < |y_0 - c|$ (ибо точка ξ, доставляемая теоремой 5 Коши, всегда лежит ближе к точке c, чем точка y_0), что равносильно

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y_0)}{g(x) - g(y_0)} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, то найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что

$$g(x) \neq 0, \left|\frac{g(y_0)}{g(x)}\right| < 1$$

для всех $x \in (a,b)$ таких, что $|x-c| < \delta_1$. Таким образом получим

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(y_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(y_0)}{g(x)}} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$a(x) := \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)}\right) + \frac{f(y_0)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)}\right) + \frac{f(y_0)}{g(x)} =: b(x)$$

для всех $x \in (a,b)$ таких, что $|x-c| < \min]\{|y_0 - c|, \delta_1\}$ (отметим, что аналогичные преобразования использовались при доказательстве теоремы 2.2.1 Штольца). Заметим, что

$$\lim_{x\to c} \frac{f(y_0)}{g(x)} = 0, \lim_{x\to c} \frac{g(y_0)}{g(x)} = 0,$$

так как точка y_0 фиксирована. Из арифметических свойств 3.1.5 предела функции вытекает, что

$$\lim_{x\to c} a(x) = A - \frac{\varepsilon}{2}, \ \lim_{x\to c} b(x) = A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует существование чисел $\delta_2, \delta_3 > 0$ таких, что $A - \varepsilon < a(x)$ при всех $x \in (a,b)$ таких, что $|x-c| < \delta_2$, и $b(x) < A + \varepsilon$ при всех $x \in (a,b)$ таких, что $|x-c| < \delta_3$. Таким образом имеем

$$A - \varepsilon < a(x) < \frac{f(x)}{g(x)} < b(x) < A + \varepsilon$$

для всех $x \in (a,b)$ таких, что $|x-c| < \min\{|y_0-c|, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

что и завершает доказательство теоремы в случае 5а).

5б). Если $c \in \mathbb{R}$, то доопределим функции f и g в точке c по непрерывности: $f(c) := 0$ и $g(c) := 0$ (если $c = \pm\infty$, то ничего доопределять не надо). Тогда для всех $x \in (a,b)$ по теореме 5 Коши имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \overset{\text{т. } 5}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

где точка $\xi = \xi(x)$ лежит между точками x и c. Так как $\lim\limits_{x\to c} \xi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'\big(\xi(x)\big)}{g'\big(\xi(x)\big)} = A$$

по теореме 3.1.6 о пределе композиции, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Следствие 3 теоремы 7 Бернулли. Пусть функция f непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, $f \in D\big(\mathring{O}_\delta(x_0)\big)$ для некоторого $\delta > 0$ и

$$\exists \lim_{x\to x_0} f'(x) = A \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Тогда

$$\exists f'(x_0) = A. \tag{4}$$

Действительно,

$$f'_{\pm}(x_0) := \lim_{x\to x_0\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{т. 7}}{=} \lim_{x\to x_0\pm} \frac{f'(x)}{1} \overset{(3)}{=} A,$$

откуда и следует равенство (4) в силу замечания 1.1 о правой и левой производных. ◀

Теорема 8 о дифференцируемости обратной функции. Пусть для некоторого промежутка I при $k \in \mathbb{N}$ выполнено $f \in D^k\big(\mathrm{int}(I)\big) \cap C(I)$ и $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathrm{int}(I)$ (см. определение 1.4.5). Тогда

(а) $f(I) = J$, где J — промежуток;

(б) существует обратная строго монотонная функция $f^{-1} : J \to I$, то есть $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ для всех $(x, y) \in I \times J$;

(в) $f^{-1} \in D^k\big(\mathrm{int}(J)\big) \cap C(J)$ и $\big(f^{-1}\big)'(y) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$ для всех $y \in \mathrm{int}(J)$.

Доказательство. Из теоремы 3 Дарбу вытекает, что либо $f'(x) > 0$ для всех $x \in \mathrm{int}(I)$, либо $f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathrm{int}(I)$. В силу следствия 2 теоремы Лагранжа это означает строгую монотонность функции f на I. Так как $f \in C(I)$, из теоремы 3.3.3 вытекают утверждения (а) и (б), а также непрерывность функции f^{-1} на промежутке $J = f(I)$.

Для любой точки $y \in \mathrm{int}(J)$ выполнено $f^{-1}(y) \in \mathrm{int}(I)$ по лемме 3.3.2, поэтому в силу арифметических свойств предела 3.1.5 и теоремы 3.1.6 о пределе композиции получим

$$\frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} := \frac{1}{\lim\limits_{x\to f^{-1}(y)} \dfrac{f(x)-f\big(f^{-1}(y)\big)}{x-f^{-1}(y)}} \overset{\text{т. 3.1.5}}{=} \lim_{x\to f^{-1}(y)} \frac{x-f^{-1}(y)}{f(x)-y} =$$

$$= \{x = f^{-1}(t) \to f^{-1}(y)\} \overset{\text{т. 3.1.6,3.3.3}}{=\!=\!=} \lim_{t\to y} \frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(y)}{f\big(f^{-1}(t)\big)-y} = \lim_{t\to y} \frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(y)}{t-y} =: \big(f^{-1}\big)'(y),$$

а следовательно $f^{-1} \in D\big(\mathrm{int}(J)\big)$.

Далее по индукции проверим, что $f^{-1} \in D^k\big(\mathrm{int}(J)\big)$. Пусть для некоторого $m \in \overline{1, k-1}$ уже доказано, что $f^{-1} \in D^m\big(\mathrm{int}(J)\big) \subset D\big(\mathrm{int}(J)\big)$. Для произвольной точки $y_0 \in \mathrm{int}(J)$ имеем $f' \in D^m\big(f^{-1}(y_0)\big)$ и $f'\big(f^{-1}(y_0)\big) \neq 0$, а значит

$$\frac{1}{f'} \in D^m\big(f^{-1}(y_0)\big)$$

в силу следствия 2.1. Тогда

$$\big(f^{-1}\big)' = \frac{1}{f'} \circ f^{-1} \in D^m(y_0)$$

в силу теоремы 2.2 и предположения индукции, а следовательно

$$f^{-1} \in D^{m+1}(y_0).$$

Таким образом проверено, что

$$f^{-1} \in D^{m+1}\big(\mathrm{int}(J)\big),$$

а значит по индукции получим

$$f^{-1} \in D^k\big(\mathrm{int}(J)\big)$$

и утверждение (в) доказано. ◀

Теорема 9. Существуют

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6}$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \tag{7}$$

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

во всех точках x, *внутренних* (см. определение 1.4.5) для области определения соответствующей функции.

Доказательство. По теореме 8 для всех $x \in (-1, 1)$ имеем

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} \overset{\text{т. } 1.2}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и равенство (5) установлено. По той же теореме для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} \overset{\text{т. } 1.2}{=} \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2},$$

и равенство (7) установлено. Равенства (6) и (8) вытекают соответственно из равенств (5) и (7) с учётом равенств

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \ \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

и арифметических свойств 1.4 дифференцируемых функций. ◀

4.4 О производных простейшей неявно заданной функций

Пусть на некотором промежутке I при $k \in \mathbb{N}$ определены функции $x, y \in D^k\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C(I)$. Пару функций $\gamma := (x, y)$ обычно называют *параметризованной плоской кривой*, а множество $\Omega := \big\{\big(x(t), y(t)\big) : t \in I\big\} \subset \mathbb{R}^2$ — *следом* кривой γ.

Пусть далее $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in \operatorname{int}(I)$ (см. определение 1.4.5). По теореме 3.8 на промежутке $J := x(I)$ определена строго монотонная обратная функция $x^{-1} \in D^k\big(\operatorname{int}(J)\big) \cap C(J)$. Определим функцию

$$g := y \circ x^{-1} : J \to y(I). \tag{1}$$

Из определения функции g вытекает, что $\Omega = \big\{\big(h, g(h)\big) : h \in J\big\}$, то есть *след параметризованной кривой* γ в рассматриваемом случае является *графиком функции* g *одной переменной*. При этом говорят, что функция g задана **неявно**.

Теорема 1. Пусть функции x и y удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда для функции g, определённой в (1), выполнено

$$g \in D^k\big(\operatorname{int}(J)\big) \cap C(J).$$

Доказательство. Из условий $x^{-1} \in C(J)$ и $y \in C(I)$ по теореме 3.2.4′ о непрерывности композиции следует $g \in C(J)$. Из леммы 3.3.2 вытекает, что $x^{-1}\big(\mathrm{int}(J)\big) \subset \mathrm{int}(I)$, поэтому из условий $x^{-1} \in D^k\big(\mathrm{int}(J)\big)$ и $y \in D^k\big(\mathrm{int}(I)\big)$ по теореме 2.2 следует $g \in D^k\big(\mathrm{int}(J)\big)$. ◀

В силу строгой монотонности функции x (см. доказательство теоремы 3.8) из леммы 3.3.2 вытекает, что $x\big(\mathrm{int}(I)\big) \subset \mathrm{int}(J)$, поэтому мы вправе дать следующее определение.

Определение 1. При всех $n \in \overline{1,k}$ функцию

$$y_x^{(n)} := g^{(n)} \circ x : \mathrm{int}(I) \to \mathbb{R} \tag{2}$$

будем называть **производной порядка n неявно заданной функции**.

Теорема 2. Для всех $t \in \mathrm{int}(I)$ выполнено равенство

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{3}$$

Для всех $n \in \overline{2,k}$ выполнено равенство

$$y_x^{(n)} = \big(y_x^{(n-1)}\big)'_x. \tag{4}$$

Доказательство. Для проверки равенства (3) на множестве $\mathrm{int}(I)$ запишем соотношения

$$y'_x \overset{(2)}{=} g' \circ x \overset{(1)}{=} \big(y \circ x^{-1}\big)' \circ x \overset{\text{Т. }1.3}{=} \big((y' \circ x^{-1})(x^{-1})'\big) \circ x \overset{\text{Т. }3.8}{=} \frac{y' \circ x^{-1}}{x' \circ x^{-1}} \circ x = \frac{y'}{x'}.$$

Для проверки равенства (4) — соотношения

$$y_x^{(n)} \overset{(2)}{=} g^{(n)} \circ x = \big(g^{(n-1)}\big)' \circ x = \big(g^{(n-1)} \circ x \circ x^{-1}\big)' \circ x \overset{(2)}{=} \big(y_x^{(n-1)} \circ x^{-1}\big)' \circ x \overset{(1),(2)}{=} \big(y_x^{(n-1)}\big)'_x.$$

◀

Следствие 1 теоремы 2.

$$y''_x \overset{(4)}{=} (y'_x)'_x \overset{(3)}{=} \frac{(y'_x)'}{x'} \overset{(3)}{=} \frac{\left(\dfrac{y'}{x'}\right)'}{x'} = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^3}.$$

Замечание 1. В случае, когда существует множество промежутков I_m с непересекающимися непустыми внутренностями (а следовательно это не более чем счётное множество), на каждом из которых функция x удовлетворяет условиям теоремы 3.8, мы получим множество различных функций g_m, определённых, вообще говоря, на *пересекающихся* промежутках J_m. При $t \in I_m$ величины $y_x^{(n)}(t)$ являются производными порядка n соответствующей функции g_m (то есть номер m зависит от t) в точке $x(t)$, могут быть вычислены по явным формулам (3), (4) и являются крайне полезным инструментом исследования следа кривой γ в целом. Именно поэтому в определении 1 фигурирует функция $g^{(n)} \circ x$, а не просто $g^{(n)}$.

4.5 Формула Тейлора

Всюду в этом праграфе будем предполагать, что $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f \in D^k(x_0)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Представление

$$f(x_0+h) = \overbrace{f(x_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} h^m}^{P_k(f,x_0,h)} + r_k(f,x_0,h) = P_k(f,x_0,h) + r_k(f,x_0,h), \tag{1}$$

называется **формулой Тейлора**, $P_k(f,x_0,h)$ — **многочленом Тейлора**, $r_k(f,x_0,h)$ — **остаточным членом**.

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{Z}^+$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, I — отрезок с концами x_0, x_0+h и $\operatorname{int}(I)$ — интервал с теми же концами; J — отрезок с концами $0, h$ и $\operatorname{int}(J)$ — интервал с теми же концами. Пусть $f \in C^k(I) \cap D^{k+1}\big(\operatorname{int}(I)\big)$, $\varphi \in C(J) \cap D\big(\operatorname{int}(J)\big)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in \operatorname{int}(J)$. Тогда остаточный член $r_k(f,x_0,h)$ в формуле (1) имеет вид

$$r_k(f,x_0,h) = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{k!} \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{\varphi'(\theta h)} (1-\theta)^k h^k, \tag{2}$$

где $\theta \in (0,1)$.

Доказательство. Для всех $t \in J$ рассмотрим функцию

$$F(t) := f(x_0+h) - P_k(f, x_0+t, h-t) = f(x_0+h) - \left[f(x_0+t) + \frac{f'(x_0+t)}{1!}(h-t) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0+t)}{k!}(h-t)^k \right].$$

Имеем $F \in C(J)$, $F(0) = r_k(f,x_0,h)$, $F(h) = 0$ и для всех $t \in \operatorname{int}(J)$ существует

$$F'(t) = -\frac{f^{(k+1)}(x_0+t)}{k!}(h-t)^k.$$

Таким образом для пары функций F, φ выполнены все условия теоремы 3.5 Коши на отрезке J, поэтому для некоторого $\theta \in (0,1)$ имеем

$$\frac{-r_k(f,x_0,h)}{\varphi(h)-\varphi(0)} = \frac{F(h)-F(0)}{\varphi(h)-\varphi(0)} = \frac{F'(\theta h)}{\varphi'(\theta h)} = -\frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{k!\varphi'(\theta h)}(h-\theta h)^k,$$

откуда и вытекает равенство (2). ◀

Теорема 1 [Теорема Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа]. Пусть $k \in \mathbb{Z}^+$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, I — отрезок с концами x_0, x_0+h и $\operatorname{int}(I)$ — интервал с теми же концами. Пусть $f \in C^k(I) \cap D^{k+1}\big(\operatorname{int}(I)\big)$. Тогда остаточный член в формуле (1) представим в виде

$$r_k(f,x_0,h) = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{(k+1)!} h^{k+1}, \text{ где } \theta \in (0,1).$$

Доказательство. Рассмотрев функцию $\varphi(t) := (h-t)^{k+1}$ получим, что пара f, φ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Записывая для такой функции φ равенство (2), получим

$$r_k(f,x_0,h) = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{k!} \frac{0-h^{k+1}}{-(k+1)(h-\theta h)^k}(h-\theta h)^k = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{(k+1)!} h^{k+1},$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 1. Теорема 3.6 Лагранжа является частным случаем теоремы 1 при $k = 0$.

Замечание 2. Используя в лемме 1 функцию $\varphi(t) := (h - t)^p$ при $p > 0$, получим остаточный член в форме **Шлёмильха-Роша**. При $p = 1$ он называется остаточным членом в форме **Коши**, а при $p = k + 1$ совпадает с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 2 [Теорема Тейлора с остаточным членом в форме Пеано]. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $f \in D^k(x_0)$. Тогда остаточный член $r_k(f, x_0, \cdot)$ в формуле (1) определён в некоторой окрестности $O_\delta(0)$ и представим в виде $r_k(f, x_0, h) = o(h^k)$ при $h \to 0$.

Доказательство проведём по индукции. При $k = 1$ теорема верна по определению 1 дифференцируемой функции. Пусть $k \geqslant 2$ и теорема верна для $k-1$. Рассмотрим функцию $\varphi(h) := f(x_0+h) - P_k(f, x_0, h)$. Тогда $\varphi(0) = 0$ и $r_k(f, x_0, h) = \varphi(h) = \varphi(h) - \varphi(0)$. Из условия $f \in D^k(x_0)$ следует, что найдётся $\delta > 0$ такое, что $f \in D^{k-1}\big(O_\delta(x_0)\big)$, а следовательно $\varphi \in D^{k-1}\big(O_\delta(0)\big)$. Так как $f' \in D^{k-1}(x_0)$ и $k - 1 \geqslant 1$, то для всех $h \in O_\delta(0)$ существует

$$\varphi'(h) = f'(x_0 + h) - \left[f'(x_0) + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{m!} h^m\right] = r_{k-1}(f', x_0, h) = o(h^{k-1})$$

при $h \to 0$ по предположению индукции. В силу последнего равенства по теореме 3.6 Лагранжа для всех $h \in O_\delta(0)$ получим

$$r_k(f, x_0, h) = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta h)h = o(\theta^{k-1}h^{k-1})h = o(h^{k-1})h = o(h^k),$$

так как $\theta = \theta(h) \in (0, 1)$. Теорема полностью доказана. ◀

Теорема 3 единственности представления функции многочленом с остатком в форме Пеано. Пусть x_0 — *предельная точка* для множества $\mathrm{Dom}(f)$ и

$$f(x_0 + h) = P_k(h) + o(h^k) = Q_k(h) + o(h^k)$$

при $h \to 0$, $x_0 + h \in \mathrm{Dom}(f)$, где $P_k(h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_k h^k$, $Q_k(h) = b_0 + b_1 h + \ldots + b_k h^k$ — *многочлены степени не выше* k. Тогда $P_k = Q_k$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$R_k(h) := P_k(h) - Q_k(h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_k h^k$$

степени не выше k, где $c_m = a_m - b_m$ при $m \in \overline{0, k}$. Заметим, что имеет место равенство $R_k(h) = o(h^k)$ при всех h таких, что $x_0 + h \in \mathrm{Dom}(f)$, а значит для всех таких h получим

$$c_0 = o(h^k) - c_1 h - \ldots - c_k h^k \to 0$$

при $h \to 0$, поэтому $c_0 = 0$. Далее

$$c_1 = \frac{o(h^k)}{h} - c_2 h - \ldots - c_k h^{k-1} = o(h^{k-1}) - c_2 h - \ldots - c_k h^{k-1} \to 0$$

при $h \to 0$, поэтому $c_1 = 0$. Действуя по индукции, получим $c_m = 0$, а следовательно и $a_m = b_m$ для всех $m \in \overline{0, k}$. Это и означает, что $P_k = Q_k$. ◀

Утверждение 1 [В представление чётной (нечётной) функции $f(x)$ в окрестности нуля многочленом с остатком в форме Пеано входят лишь чётные (нечётные) степени x]. Пусть функция f чётна (нечётна), 0 — *предельная точка* для множества $\mathrm{Dom}(f)$ и

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k + o(x^k)$$

при $x \to 0$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Тогда $c_{2n+1} = 0$ ($c_{2n} = 0$) для всех $n \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. Пусть функция f чётна (случай нечётной функции рассматривается аналогично), то есть $f(x) = f(-x)$ для всех $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Тогда для всех $x \in \mathrm{Dom}(f)$ получим

$$f(-x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + (-1)^k c_k x^k + o(x^k)$$

и

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = c_0 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2p} x^{2p} + o(x^k),$$

где $2p \leqslant k$. В силу теоремы 3 единственности это и означает, что $c_1 = c_3 = \ldots = 0$. ◀

Пример 1. В силу равенства $\mathrm{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ по индукции убеждаемся, что $\mathrm{arctg} \in C^\infty(\mathbb{R})$. В силу равенства

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^k x^{2k} + o(x^{2k})$$

при $x \to 0$, теоремы 2 и теоремы 3 единственности получим, что

$$\frac{\mathrm{arctg}^{(2k+1)}(0)}{(2k)!} = (-1)^k$$

при $k \in \mathbb{Z}^+$, а также

$$\mathrm{arctg}^{(2k)}(0) = 0.$$

Отсюда получаем формулу

$$\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}).$$

Пример 2 (Коши). Рассмотрим функцию

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и докажем по индукции, что $\exists f^{(k)}(0) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для $k = 0$ утверждение верно по определению функции f, пусть оно верно для некоторого $k - 1$. По индукции легко убедиться в том, что

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{P_1(x) e^{-\frac{1}{x^2}}}{Q_1(x)}$$

при $x \neq 0$, где P_1 и $Q_1 \neq \mathbf{0}$ — многочлены. По определению производной, так как $f^{(k-1)}(0) = 0$ по предположению индукции, имеем

$$f^{(k)}(0) := \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{P_1(x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{xQ_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{P_1(x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{Q(x)},$$

где $Q(x) := xQ_1(x)$ — многочлен. Так как $\lim\limits_{x\to 0} P_1(x) = const \in \mathbb{R}$, то нам достаточно доказать, что для произвольного многочлена $Q \neq \mathbf{0}$ выполнено

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{Q(x)} = 0. \tag{3}$$

Пусть q — *младшая степень* в многочлене Q, то есть $Q(x) = x^q\big(c_q + o(1)\big)$, где $c_q \neq 0$. Для проверки равенства (3) нам достаточно доказать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^q} = \lim_{x\to 0} x^q \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2q}} = 0 \tag{4}$$

для любого $q \in \mathbb{Z}^+$. Для проверки последнего равенства заметим, что $\lim\limits_{x\to 0} x^q = const \in \mathbb{R}$ и что

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2q}} = \left\{ \frac{1}{x^2} = t \to +\infty \right\} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^q}{e^t} = 0$$

по правилу 3.7 Лопиталя. Таким образом равенства (4) и (3) установлены, отсюда получаем $f^{(k)}(0) = 0$.

Отметим, что $f(x) \neq 0$ для всех $x \neq 0$ несмотря на то, что все коэффициенты её многочлена Тейлора в нуле равны нулю.

4.6 О выпуклых функциях

Определение 1 выпуклого числового множества. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется **выпуклым**, если для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $x_1 \leqslant x_2$, имеем $[x_1, x_2] \subset \Omega$.

Замечание 1 о выпуклых числовых множествах. Из определения 1 вытекает, что *промежутки* (см. определение 1.4.4) и только они являются выпуклыми подмножествами $\mathbb{R}$.

Определение 2. Функция f называется **выпуклой** на *выпуклом множестве* (то есть на *промежутке*) $I \subset \mathrm{Dom}(f)$, если для всех $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \tag{1}$$

для всех $x_1, x_2 \in I$. Если при этом для всех $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ и $x_1 \neq x_2$ неравенство (1) строгое, то функцию f называют **строго выпуклой** на промежутке I. Выпуклые функции также называют **выпуклыми вниз**. Заменяя неравенство (1) на противоположное, получим определение **вогнутой** функции, которая также называется **выпуклой вверх**. В случае строгого неравенства аналогично даётся определение **строго вогнутой** на промежутке I функции.

Пример 1. Из определения 2 вытекает, что при любых $k, b \in \mathbb{R}$ функция $f(x) := kx + b$ является одновременно *выпуклой вниз и вверх* на любом промежутке I.

Теорема 1. Функция f является выпуклой на промежутке $I \Leftrightarrow$ на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset I$ график функции f лежит не выше хорды, соединяющей точки $\big(x_1, f(x_1)\big)$ и $\big(x_2, f(x_2)\big)$.

Доказательство. Если $x_1 \neq x_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки $\big(x_1, f(x_1)\big)$ и $\big(x_2, f(x_2)\big)$, имеет вид

$$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1). \tag{2}$$

$\Rightarrow$: Любая точка $x \in [x_1, x_2]$ имеет вид $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Подставляя это выражение для x в уравнение (2), получим

$$\begin{gathered} y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\big((\alpha_1 - 1)x_1 + \alpha_2 x_2\big) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\alpha_2(x_2 - x_1) = \\ = (1 - \alpha_2) f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \end{gathered} \tag{3}$$

Для выпуклой функции f в силу неравенства (1) это означает, что

$$f(x) \leqslant y(x) \tag{4}$$

для всех $x \in [x_1, x_2]$.

$\Leftarrow$: Пусть на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset I$ неравенство (4) выполнено для всех $x \in [x_1, x_2]$. Так как для любых $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in [x_1, x_2]$, то из неравенств (3) и (4) вытекает выполнение неравенства (1) в случае $x_1 \leqslant x_2$. Меняя x_1 и x_2 местами, получим выполнение неравенства (1) также и для случая $x_1 > x_2$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 2. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и функция f является выпуклой на (a, b). Тогда выполнено:

(а) $f \in C(a, b)$;

(б) всюду на (a, b) определены неубывающие левая и правая производные f'_- и f'_+ функции f (см. замечание 1.1), причём для всех $x, y \in (a, b)$ при $x < y$ выполнено неравенство

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y); \tag{5}$$

(в) $f \in D\big((a, b) \setminus \Omega\big)$ для некоторого множества Ω такого, что $\operatorname{card}(\Omega) \leqslant \aleph_0$.

Доказательство. Для начала докажем существование у функции f левой и правой производных всюду на (a, b), а также выполнение неравенства (5). Пусть

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b,$$

тогда найдётся $\lambda \in (0, 1)$, для которого

$$x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3, \tag{6}$$

что равносильно равенствам

$$x_2 - x_1 = \lambda(x_3 - x_1), \tag{7}$$

$$(1-\lambda)(x_3 - x_1) = x_3 - x_2. \tag{8}$$

Из равенства (6) и неравенства (1) для выпуклой функции f вытекает неравенство

$$f(x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3), \tag{9}$$

равносильное неравенствам

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant \lambda\big(f(x_3) - f(x_1)\big), \tag{10}$$

$$(1-\lambda)\big(f(x_3) - f(x_1)\big) \leqslant f(x_3) - f(x_2). \tag{11}$$

Разделив неравенство (10) почленно на равенство (7), получим неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{12}$$

Разделив неравенство (11) почленно на равенство (8), получим неравенство

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{13}$$

Далее пусть

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b. \tag{14}$$

Заменяя в неравенствах (12) и (13) числа x_1, x_2, x_3 на x_2, x_3, x_4 соответственно, получим неравенства

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leqslant \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \tag{15}$$

и

$$\frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \leqslant \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}. \tag{16}$$

Заметим, что неравенства (12), (13), (15), (16) могут быть записаны в виде цепочки неравенств

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{(12)}{\leqslant} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \overset{(13)}{\leqslant} \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \overset{(15)}{\leqslant} \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \overset{(16)}{\leqslant} \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}, \tag{17}$$

верных для *всех чисел* x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющих неравенствам (14). Теперь *зафиксируем* произвольную точку $x_2 \in (a, b)$. Из неравенства (15) вытекает, что функция

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

не убывает на (x_2, b). Далее *зафиксируем* произвольную точку $x_1 \in (a, x_2)$. Из неравенств (12) и (13) вытекает, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant g(x_3)$$

для всех $x_3 \in (x_2, b)$. Из теоремы 3.4.1 о пределе монотонной функции вытекает существование $f'_+(x_2)$, а также выполнение неравенства

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leqslant f'_+(x_2) \overset{3.\,1.1}{:=} \lim_{x_3\to x_2+} g(x_3) \tag{18}$$

для всех $x_1 \in (a,x_2)$. В силу произвольности точки $x_2 \in (a,b)$ существование правой производной функции f на (a,b) доказано. Совершенно аналогично с помощью неравенств (13), а затем (15) и (16) по теореме 3.4.1 устанавливается существование $f'_-(x_3)$ во всех точках $x_3 \in (a,b)$.

Далее для любого $x_2 \in (a,b)$ из неравенства (18) в силу теоремы 3.1.2 о предельном переходе в неравенстве при $x_1 \to x_2-$ и установленного выше существования $f'_-(x_2)$ получим

$$f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2). \tag{19}$$

Далее для любых чисел $a < x_1 < x_3 < x_4 < b$ из цепочки (17) вытекает, что

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}$$

для всех $x_2 \in (x_1,x_3)$. В силу теоремы 3.1.2 о предельном переходе в неравенстве при $x_2 \to x_1+$ и установленного выше существования $f'_+(x_1)$ это означает, что

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}.$$

Так как при любых фиксированных $a < x_1 < x_4 < b$ последнее равенство верно для всех $x_3 \in (x_1,x_4)$, то по аналогичным соображениям при $x_3 \to x_4-$ получим

$$f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_4). \tag{20}$$

Из неравенств (19) и (20) сразу вытекает неравенство (5), а также неубывание функций f'_+ и f'_- на (a,b), что завершает доказательство пункта (б).

Утверждение пункта (а) вытекает из пункта (б), в котором для любой точки $x_1 \in (a,b)$ установлено существование $f'_+(x_1)$ и $f'_-(x_1)$, а следовательно (см. замечание 1.1) и выполнение равенств

$$\lim_{x\to x_1+} f(x) = \lim_{x\to x_1-} f(x) = f(x_1),$$

обеспечивающих непрерывность функции f в точке x_1 (см. замечания 3.2.1 и 3.1.2).

Пусть функция f не является дифференцируемой в некоторой точке $y \in (a,b)$. В силу замечания 3.2.1 из неравенства (5) получаем неравенство

$$f'_+(x) \leqslant f'_-(y) < f'_+(y)$$

для всех $x \in (a,y)$. Из теоремы 3.4.1 о пределе монотонной функции вытекает существование $f'_+(y-)$, а также выполнение неравенства

$$f'_+(y-) := \lim_{x\to y-} f'_+(x) \leqslant f'_-(y) < f'_+(y).$$

Это означает, что монотонная функция f'_+ терпит разрыв в точке y, а следовательно множество всех таких точек y не более, чем счётно (см. теорему 3.4.2 о точках разрыва монотонной функции). На этом завершается доказатльство пункта (в), а с ним и всей теоремы. ◀

> ***Замечание 2.*** Из выпуклости функции f на *отрезке* $[a, b]$, вообще говоря, не следует, что $f \in C[a, b]$.

Действительно, по определению 2 нетрудно убедиться в выпуклости функции

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ при } x \in (0, 1) \\ 1 \text{ при } x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$, хотя в граничных точках этого отрезка она терпит разрыв. ◀

> ***Замечание 3.*** Теорема 2 допускает следующее обращение (см. [5, страница 311]): если у функции $f \in C(a, b)$ всюду на (a, b) существует одна из её односторонних производных f'_+ или f'_-, которая не убывает на (a, b), то функция f является выпуклой на этом интервале.

Теорема 3. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и $f \in D(a, b)$. Тогда функция f является выпуклой на (a, b) $\Leftrightarrow$ функция f' не убывает на (a, b).

Доказательство.

$\Rightarrow$: Вытекает непосредственно из пункта (б) теоремы 2 в силу того, что

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$$

для всех $x \in (a, b)$.

$\Leftarrow$: Пусть

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b,$$

в силу неубывания функции f' по теореме 3.6 Лагранжа имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

откуда получаем неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \tag{21}$$

равносильное неравенству

$$\left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2}\right) f(x_2) \leqslant \frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_3)}{x_3 - x_2}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$f(x_2) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3). \tag{22}$$

Для произвольного $\lambda \in (0, 1)$ и любых x_1, x_3 обозначим

$$x_2 := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Так как $x_2 \in (x_1, x_3)$, в силу неравенства (22) и равенств

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = 1 - \lambda, \quad \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \lambda$$

получим

$$f\big((1-\lambda)x_1+\lambda x_3\big) \leqslant (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_3).$$

Из последнего неравенства получаем выполнение неравенства (1) при $x \neq y$ и $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$. При $x = y$ или $\alpha_1\alpha_2 = 0$ неравенство (1) тривиально, таким образом выпуклость функции f на (a,b) доказана. ◀

Замечание 4. Выполнение (строгого) неравенства (21) для всех

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$$

равносильно (строгой) выпуклости функции f на (a,b).

Действительно, для (строго) выпуклой функции f (строгое) неравенство (21) получается как следствие (строгих) неравенств (12) и (13) (см. доказательство теоремы 2). Обратно, (строгая) выпуклость функции f вытекает из (строгого) неравенства (21) (см. доказательство теоремы 3). ◀

Теорема 3′. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и $f \in D(a,b)$. Тогда функция f является строго выпуклой на (a,b) $\Leftrightarrow$ функция f' возрастает на (a,b).

Доказательство.
$\Rightarrow$: Из строгой выпуклости функции f вытекает (см. замечание 4) выполнение строгого неравенства (21), из которого для любых $x_1, x_3 \in (a,b)$ при $x_1 < x_3$ в силу теоремы 3 и теоремы 3.6 Лагранжа, выбирая произвольный $x_2 \in (x_1,x_3)$, получим

$$f'(x_1) \overset{\text{Т. }3}{\leqslant} f'(\xi_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \overset{(21)}{<} \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2) \overset{\text{Т. }3}{\leqslant} f'(x_3),$$

и возрастание функции f' доказано.
$\Leftarrow$: В силу возрастания функции f' при

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$$

по теореме 3.6 Лагранжа получим

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

а значит выполнено строгое неравенство (21), из которого (см. доказательство теоремы 3) вытекает строгая выпуклость функции f. ◀

Теорема 4. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и $f \in D(a,b)$. Тогда функция f является выпуклой на (a,b) $\Leftrightarrow$ график функции f на (a,b) лежит не ниже любой проведённой к нему касательной.

Доказательство. Уравнение прямой, касательной (см. 1.4) к графику функции f в точке x_0, имеет вид:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

откуда по теореме 3.6 Лагранжа для любого $x \in (a, b)$ имеем

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f(x_0)\big)(x - x_0), \tag{23}$$

где точка ξ лежит между точками x_0 и x.

$\Rightarrow$: Если функция f (строго) выпукла на (a, b), то функция f' не убывает (возрастает) на (a, b) по теореме 3 ($3'$), поэтому правая часть равенства (23) неотрицательна для всех $x \in (a, b)$ (положительна для всех $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$), а значит таким свойством обладает и его левая часть.

$\Leftarrow$: Если для любого $x_0 \in (a, b)$ и для всех $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ выполнено

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant (>)\ 0,$$

то

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant (<)\ f'(x_0) \tag{24}$$

для всех $x_1 \in (a, x_0)$ и

$$\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} \geqslant (>)\ f'(x_0) \tag{25}$$

для всех $x_3 \in (x_0, b)$. Из неравенств (24) и (25) при

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b,$$

полагая $x_0 := x_2$, получим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant (<) \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

что совпадает со (строгим) неравенством (21), которое равносильно (строгой) выпуклости функции f на (a, b) в силу замечания 4. ◀

Теорема 5. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и $f \in D^2(a, b)$. Тогда функция f является выпуклой на (a, b) $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 3 в силу следствия 3.2 теоремы Лагранжа. ◀

Замечание 5. Теоремы 3 - 5 и $3'$ остаются в силе при замене (a, b) на произвольный *промежуток* (см. определение 1.4.4) I.

5. Первообразная

Определение 1. Функция F называется **первообразной функции f на множестве** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Теорема 1. Пусть функции F_1 и F_2 являются *первообразными* функции f на некотором промежутке I (см. определение 1.4.4). Тогда найдётся константа $c \in \mathbb{R}$ такая, что

$$F_1(x) = F_2(x) + c \tag{1}$$

для всех $x \in I$.

Доказательство. Так как

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$$

для всех $x \in I$, то по следствию 4.3.1 теоремы Лагранжа получим, что $F_1(x) - F_2(x) \equiv c$ для всех $x \in I$, отсюда и вытекает равенство (1). ◀

Определение 2. **Неопределённым интегралом** функции f на некотом промежутке (см. определение 1.4.4) $I \subset \mathrm{Dom}(f)$ называется *класс (или множество) всех первообразных* функции f на промежутке I и обозначается

$$\int f(x)dx. \tag{2}$$

В обозначении (2) промежуток I явно не указывается и считается фиксированным заранее.

Замечание 1. Если множество первообразных функции f на промежутке I непусто, то в силу теоремы 1 имеем

$$\int f(x)dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\},$$

где F — произвольная первообразная функции f на промежутке I. При этом чаще всего используется *упрощённая запись*

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Теорема 2. Пусть $p \neq -1$, тогда

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c,$$

где все неопределённые интегралы рассматриваются на любом промежутке, целиком входящем в область определения соответствующей функции.

Доказательство вытекает из формул для производных элементарных функций (см. теоремы 4.1.2 и 4.3.9) и замечания 1. ◀

Теорема 3. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, функции f и g обладают первообразными на промежутке I и $V \in D(I)$. Тогда

$$\int V'(x)dx = V(x) + c, \tag{3}$$

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + c, \tag{4}$$

где сумма классов в правой части равенства (4) понимается как класс, состоящий из всевозможных сумм представителей слагаемых классов, умноженных на α и на β соответственно.

Доказательство. Равенство (3) вытекает из замечания 1 и из того факта, что функция V по определению является первообразной функции V' на промежутке I.

Равенство (4) вытекает из замечания 1 и из того факта, что если F и G — первообразные функций f и g на промежутке I сответственно, то функция $\alpha F + \beta G$ является первообразной функции $\alpha f + \beta g$ на I (см. арифметические свойства 4.1.4 производной). ◀

Утверждение 1. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, функция F является первообразной функции f на (a, c) и на (c, b). Если F и f непрерывны в точке c, то функция F является первообразной функции f на (a, b).

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что $F'(c) = f(c)$. Так как

$$\exists \lim_{x \to c} F'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

то $\exists F'(c) = f(c)$ в силу следствия 4.3.3. ◀

Теорема 4 о замене переменной. Пусть I_t и I_x — некоторые промежутки (см. определение 1.4.4), $\varphi \in D(I_t)$, $\varphi(I_t) \subset I_x$ и функция F является первообразной функции f на I_x. Тогда существует

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right) \circ \varphi = F\big(\varphi(t)\big) + c, \tag{5}$$

где равенство (5) рассматривается на промежутке I_t.

Доказательство. В силу теоремы 4.1.3 о производной композиции имеем, что функция $F\big(\varphi(t)\big)$ является первообразной функции $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ на промежутке I_t, поэтому равенство (5) вытекает из замечания 1. ◀

Пример 1.

$$\int \sin^3 t \cos t dt \overset{\{x=\sin t\}}{=\!=\!=\!=} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c \overset{\text{т. } 4}{=} \frac{\sin^4 t}{4} + c.$$

Теорема 4′ о замене переменной. Пусть I_t — некоторый промежуток (см. определение 1.4.4), $\varphi \in D(I_t)$, $\varphi'(t) \neq 0$ для всех $t \in I_t$ и функция G является первообразной функции $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ на I_t. Тогда существует

$$\int f(x)dx = \left(\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt\right) \circ \varphi^{-1} = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c, \tag{6}$$

где равенство (6) рассматривается на промежутке $I_x := \varphi(I_t)$, а функция $\varphi^{-1} : I_x \to I_t$ является *обратной* для функции φ.

Доказательство. По теореме 4.3.8 на промежутке I_x определена дифференцируемая обратная функция $\varphi^{-1} : I_x \to I_t$, поэтому по теореме 4 имеем

$$G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c = \left(\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt\right) \circ \varphi^{-1} = \int f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)(\varphi^{-1})'(x)dx \overset{\text{т. } 4.3.8}{=\!=\!=}$$

$$\overset{\text{т. } 4.3.8}{=\!=\!=} \int f(x)\frac{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}dx = \int f(x)dx.$$

◀

Пример 2. На интервале $I := (-1, 1)$ имеем

$$\int \sqrt{1-x^2}dx \overset{\{x=\sin t,\ t=\arcsin x\}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c \overset{\text{т. } 4'}{=} \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c.$$

Это равенство верно и на всём отрезке $[-1, 1]$, так как по правилу 4.3.7 Лопиталя имеем

$$F'_{\pm}(\mp 1) := \lim_{x \to \mp 1 \pm} \frac{F(x) - F(\mp 1)}{x \pm 1} \overset{\text{т. } 4.3.7}{=} \lim_{x \to \mp 1 \pm} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \to \mp 1 \pm} \sqrt{1-x^2} = 0 = \sqrt{1-x^2}\big|_{x=\mp 1},$$

где

$$F(x) := \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}).$$

Теорема 5 об интегрировании по частям. Пусть I — некоторый промежуток (см. определение 1.4.4), $u, v \in D(I)$ и у одной из функций uv' или vu' существует первообразная на I. Тогда у второй из этих функций существует первообразная на I и выполнено равенство

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \tag{7}$$

часто неформально записываемое в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Пусть на промежутке I существует первообразная G функции vu' (случай существования первообразной функции uv' рассматривается аналогично). Из формулы производной произведения (см. теорему 4.1.4) вытекает, что функция $uv - G$ является первообразной функции uv' на промежутке I. В силу замечания 1 это означает, что классы, стоящие в левой и правой частях равенства (7) совпадают и равны $\{uv - G + c : c \in \mathbb{R}\}$. ◀

Замечание 2. Требование существования первообразной у одной из функций uv' или vu' в теореме 5 существенно, в качестве иллюстрации подойдут функции

$$u(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right) & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}; \quad v(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^4}\right) & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

на интервале $(-1, 1)$.

Библиография

[1] Донеддю А. Евклидова Планиметрия. Москва: Издательство “Наука”, 1978, 271 с. (цитируется на страницах 38, 39).

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. 2-е изд. том 1. Москва: Физматлит, 2005, 646 с. (цитируется на страницах 17, 42, 43).

[3] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс. 2-е изд. Москва: Издательство Московского Университета, 1985, 660 с. (цитируется на страницах 38, 42).

[4] Шоке Г. Геометрия. Москва: Издательство “Мир”, 1970, 239 с. (цитируется на страницах 38, 39, 42).

[5] Pollard D. A User’s Guide to Measure Theoretic Probability. 7th ed. New York: Cambridge University Press, 2010, 351 p. (цитируется на странице 75).

Предметный указатель

Бином Ньютона, 22
Вещественное число, 7
Грань
  верхняя, 11
  нижняя, 11
Дифференциал, 53
Инвариантность формы первого дифференциала, 56
Интервал, 18
Инфимум, 11
Касательная
  прямая, 57
Максимум, 11
Минимум, 11
Многочлен Тейлора, 68
Множество
  выпуклое, 71
  ограниченное, 11
О-большое, 44
О-малое, 43
Остаточный член в формуле Тейлора, 68
  в форме Лагранжа, 68
  в форме Пеано, 69
Отрезок, 18
Полуинтервал, 18
Предел
  последовательности, 19, 28
  функции
    односторонний, 27
    по Гейне, 26
    по Коши, 26
Производная, 53
  порядка k, 57
Промежуток, 18
Супремум, 11
Точка
  изолированная, 26
  локального максимума, 60
  локального минимума, 60
  несобственная, 27
  предельная, 26
  разрыва
    второго рода, 36
    первого рода, 36
    устранимого, 36
  экстремума, 60
Формула Лейбница, 58
Формула Тейлора, 68
Функция
  k раз дифференцируемая в точке, 57
  k раз дифференцируемая на множестве, 57
  вогнутая, 71
  возрастающая, 33
  выпуклая, 71
  выпуклая вверх, 71
  выпуклая вниз, 71
  дифференцируемая в точке, 53
  дифференцируемая на множестве, 53
  монотонная, 33
  непрерывная
    в точке, 30
    на множестве, 30
  неявная, 66
  обратная, 33
  ограниченная, 32
  равномерно непрерывная на множестве, 50
  строго вогнутая, 71
  строго выпуклая, 71
  строго монотонная, 33
  убывающая, 33

Список обозначений

Р

$C(\Omega)$ 30
$C^\infty(\Omega)$ 58
$C^k(\Omega)$ 58
$D(\Omega)$ 53
$D^k(\Omega)$ 57
$O_\delta(\mathbf{x}_0)$ 19
$P_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ 68
$\mathbb{Q}$ 6
$\mathbb{R}$ 7
$\inf \Omega$ 11
$\mathring{O}_\delta(\mathbf{x}_0)$ 19
$\mathrm{int}(I)$ 18
$\max \Omega$ 11
$\min \Omega$ 11
$\sup \Omega$ 11
$df(\mathbf{x}_0)$ 53
$f'(\mathbf{x}_0)$ 53
$f^{(k)}$ 57
$r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ 68