

## **Научный проект № 20-06-01**

### **Разработка монотонных бикompактных схем и разрывного метода Галеркина для решения уравнений математической физики (Научное направление: Вычислительная математика)**

**Руководитель проекта** член-корр. РАН, д.ф.-м.н. Тишкин В.Ф.

**Исполнители проекта:** д.ф.-м.н. Рогов Б.В., к.ф.-м.н. Брагин М.Д., к.ф.-м.н. Ладонкина М.Е., м.н.с. Неклюдова О.А., м.н.с. Чечина А.А.

#### **Результаты, полученные по проекту в 2020 году**

Показано, что пространственная аппроксимация четвертого порядка у известной полудискретной бикompактной схемы для одномерного линейного уравнения теплопроводности основана на кубическом интерполяционном полиноме Эрмита. При помощи многомерных версий этого полинома впервые построены высокоточные бикompактные схемы для многомерного линейного уравнения конвекции-диффузии. Они имеют четвертый порядок аппроксимации по пространству, консервативны, абсолютно устойчивы. Для реализации новых схем предложен экономичный метод итерируемой приближенной факторизации. На точных решениях тестовых задач показана сеточная сходимость полученных схем с высокими порядками. Впервые по бикompактной схеме рассчитана задача о распаде вихря Тейлора-Грина в турбулентном режиме, на этом близком к практике примере продемонстрировано высокое спектральное разрешение схем данного класса. Эта схема разработана на основе результатов проекта и уже имевшихся наработок по бикompактным схемам для уравнений гиперболического типа. Таким образом, в проекте существенно расширен круг задач аэро- и гидродинамики, к решению которых можно применять бикompактные схемы.

Проведен анализ влияния различных типов лимитеров на точность разрывного метода Галеркина. При использовании “моментного” лимитера, гарантируется заявленный порядок точности, при использовании лимитера Кокбурна порядок точности на гладком решении падает. Кроме того, данный лимитер, как и все TVD лимитеры может снизить точность получаемого решения до первого. Сглаживающий оператор на основе WENO-реконструкции и сглаживающий оператор нового типа на основе усреднения решений, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных не снижают порядок точности метода. Проведенное сравнение действия этих двух лимитеров при решении серии тестовых задач показало, что

применение нового сглаживающего оператора, не уступает действию WENO-лимитера, а в некоторых случаях превосходит по точности получаемого решения. SLOP –лимитер так же гарантирует повышенный порядок точности. В многомерном случае на сетках произвольной структуры могут быть использованы все исследуемые лимитеры, кроме “моментного”.

**Развернутый отчет о НИР по проекту хранится в библиотеке ИПМ им. М.В. Келдыша РАН; Инв. № 20/А-38.**

## **2. Ожидаемые результаты**

Ожидалось, что в 2020 году будут получены следующие результаты:

1. Общий метод построения высокоточных бикомпактных схем для уравнения теплопроводности, пригодный для случая нескольких пространственных измерений и случая переменных коэффициентов.
2. Экономичные бикомпактные схемы четвертого порядка для многомерного линейного уравнения теплопроводности, которые можно в перспективе использовать совместно с уже имеющимися бикомпактными схемами для уравнений гиперболического типа с целью расчетов течений вязкой жидкости.
3. Анализ влияния различных типов лимитеров на точность разрывного метода Галеркина и определены наиболее подходящие для практического применения.

### 3. Результаты, полученные по проекту

**Введение.** В работах [1-4] предложен и развивается класс высокоточных бикомпактных схем для уравнений гиперболического типа. Аппроксимация пространственных производных в этих схемах симметричная компактная (четвертого, шестого, восьмого и так далее порядков), при этом ее шаблон целиком помещается в одну ячейку сетки. По каждому пространственному направлению шаблон включает в себя лишь два целых узла, что объясняет название этих схем. Отличительной чертой бикомпактных схем является сочетание нескольких положительных свойств: (а) спектральное разрешение, лучшее по сравнению с классическими компактными схемами равного порядка аппроксимации по пространству [5, 6]; (б) равное число граничных условий в дифференциальной и дискретной постановках задачи; (в) неявность (слабые ограничения по устойчивости); (г) экономичность реализации, близкая к явным схемам.

Первое из перечисленных свойств делает бикомпактные схемы перспективными для расчетов турбулентных течений вязкой жидкости по методике LES/ILES (large eddy simulation, метод крупных вихрей, implicit LES, неявный LES). Однако, для уравнений параболического типа бикомпактные схемы были разработаны в недостаточной степени: до исследований настоящего проекта эти схемы были построены лишь для линейного одномерного уравнения теплопроводности, см. [7]. Конечно, для дискретизации параболической части решаемых уравнений всегда можно воспользоваться методом расщепления по физическим процессам и далее какой-либо известной численной схемой. Однако, более желательной с точки зрения порядка аппроксимации по времени и алгоритмической простоты представляется однородная бикомпактная аппроксимация для всех пространственных производных.

При численном решении сложных производственных задач необходимо использовать методы высокой точности. Одним из наиболее актуальных на сегодняшний день высокоточных методов является разрывный метод Галеркина (РМГ). Для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, необходимо вводить так называемые ограничители наклона, или лимитеры, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. Однако, вопрос выбора наиболее подходящего для конкретных классов задач лимитера до конца не изучен. Основной целью данного исследования является выяснение влияния различных типов лимитеров на точность и робастность разрывного метода Галеркина.

Рассмотрены: наиболее широко используемый, классический лимитер Кокбурна, “моментный” лимитер повышенного порядка точности Криводоновой, WENO-лимитер, сглаживающий оператор нового типа на основе усреднения решений, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных, SLOP-лимитер.

Для исследования влияния различных лимитирующих функций на порядок точности решения разрывным методом Галеркина сформулируем задачу: распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции. Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта Римана  $R^+$ . На границах области заданы постоянные граничные условия. Решение данной задачи сохраняет гладкость до того момента времени, пока характеристики, выпущенные из разных точек, не начнут пересекаться.

При решении РМГ данной задачи с квадратичными базисными функциями без использования лимитеров получаем третий порядок точности. При использовании “моментного” лимитера, порядок точности сохраняется, при использовании лимитера Кокбурна порядок точности на гладком решении падает до второго. Кроме того, данный лимитер, как и все TVD лимитеры может снижать точность получаемого решения до первого. Сглаживающий оператор на основе WENO-реконструкции и сглаживающий оператор нового типа на основе усреднения решений, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных не снижают порядок точности метода. Проведено сравнение действия данных лимитеров при решении серии тестовых задач показало, что применение нового сглаживающего оператора, не уступает действию WENO-лимитера, а в некоторых случаях превосходит по точности получаемого решения. SLOP –лимитер так же гарантирует повышенный порядок точности.

Как известно, одним из несомненных преимуществ разрывного метода Галеркина является возможность его применения на сетках произвольной структуры. Классический лимитер Кокбурна был разработан для тетраэдральных сеток, хотя идея данного лимитера легко реализуется в многомерном случае на сетках произвольной структуры. Данный лимитер является наиболее надежным в использовании. Высокоточный “моментный” лимитер хорошо работает только на структурированных сетках. Для сеток с произвольной формой ячеек могут быть применены лимитер на основе WENO-реконструкции, лимитер на основе усреднения решений, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных и SLOP-лимитер. Наиболее простой и эффективной реализацией лимитера является SLOP-лимитер. Хотя и этот лимитер не лишен недостатков, т.к. его применение не гарантирует подавление нефизических осцилляций. Но его основное преимущество заключается в простоте реализации на сетках с ячейками произвольной формы.

**Задачи, решавшиеся в проекте.** Итак, для устранения описанных выше проблем необходимо было поставить и решить следующие задачи:

1. Найти полином, на основе которого методом конечных объемов может быть получена

уже известная (см. [7]) полудискретная бикомпактная схема четвертого порядка для одномерного линейного уравнения теплопроводности.

2. Построить при помощи этого полинома бикомпактные схемы четвертого порядка для уже многомерного линейного уравнения теплопроводности. Предложить и протестировать эффективный метод реализации этих новых схем, например, метод ИПФ (итерируемой приближенной факторизации). Продемонстрировать высокую точность новых схем на решениях стационарных и нестационарных задач.
3. Совместить результаты решения задач 1-2 и уже имеющиеся наработки по бикомпактным схемам для уравнений гиперболического типа, чтобы рассчитать задачу о распаде вихря Тейлора-Грина (в турбулентном режиме) и тем самым продемонстрировать спектральное разрешение схем этого класса на близком к практике примере.
4. Исследование различных типов лимитеров для разрывного метода Галеркина и определение наиболее оптимальных для конкретных классов задач.

Отметим, что задача 3 возникла уже по ходу реализации проекта сверх плана, указанного изначально в заявке.

**Задача 1.** Рассмотрим одномерное линейное уравнение конвекции-диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < x_{\max}, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  – искомая функция,  $\nu > 0$  и  $c_x$  – постоянные коэффициенты,  $f(x, t)$  – заданная функция-источник. Наличие конвективного члена в уравнении (1) позволяет рассмотреть более интересные вычислительные примеры; его наличие не противоречит обозначенным выше задачам проекта, так как всегда можно положить  $c_x = 0$  и получить «чистое» уравнение диффузии (теплопроводности). Наряду с искомой функцией мы будем также иметь дело с ее частной производной первого порядка по  $x$ :

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Введем на отрезке  $x \in [0, x_{\max}]$  сетку  $\Omega_x$ , состоящую из узлов

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x-1} < x_{N_x} = x_{\max}.$$

Шаг  $h_{x, j+1/2} = x_{j+1} - x_j$  ( $j = \overline{0, N_x - 1}$ ) этой сетки может быть переменным. Далее нижний индекс

$j+1/2$  у шага  $h_x$  опускается всюду, где это допустимо.

Зафиксируем время  $t$ . Возьмем значения  $u_j = u(x_j, t)$  и  $v_{x,j} = v_x(x_j, t)$  функций  $u(x, t)$  и  $v_x(x, t)$  соответственно в узлах сетки  $\Omega_x$ . Построим по этим значениям в каждой ячейке  $K_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$  сетки  $\Omega_x$  кубический интерполяционный полином Эрмита для функции  $u(x, t)$ :

$$u_h(x, t; K_{j+1/2}) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3, \quad \xi = \frac{x - x_{j+1/2}}{h_x}, \quad x \in K_{j+1/2}, \quad (2)$$

где  $x_{j+1/2} = (x_j + x_{j+1})/2$ , а коэффициенты  $a_m = a_m(t)$  ( $m = \overline{0, 3}$ ) даются выражениями:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{h_x}{8}(v_{x,j+1} - v_{x,j}), & a_1 &= \frac{3}{2}(u_{j+1} - u_j) - \frac{h_x}{4}(v_{x,j} + v_{x,j+1}), \\ a_2 &= \frac{h_x}{2}(v_{x,j+1} - v_{x,j}), & a_3 &= h_x(v_{x,j} + v_{x,j+1}) - 2(u_{j+1} - u_j). \end{aligned} \quad (3)$$

Если функция  $u(x, t)$  достаточно гладкая, то полином (2) аппроксимирует ее на  $K_{j+1/2}$  с погрешностью  $O(h_x^4)$  при  $h_x \rightarrow 0$ . Совокупность полиномов (2) на всем отрезке  $[0, x_{\max}]$  составляет сплайн гладкости 1.

Построим теперь полудискретную бикompактную схему для уравнения (1) при помощи метода прямых и метода конечных объемов. Возьмем само это уравнение, а также его дифференциальное следствие – уравнение, полученное из (1) взятием от обеих его частей производной  $\partial/\partial x$ . Проинтегрируем два этих уравнения по ячейке  $K_{j+1/2}$  при  $t = \text{const}$ , заменим в этих интегралах функцию  $u(x, t)$  на полином (2) и поделим результат интегрирования на шаг  $h_x$ . Результатом этих действий станет искомая схема:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A_0^x u_{j+1/2}) + c_x \Lambda_1^x u_{j+1/2} = v \Lambda_2^x u_{j+1/2} + \Phi_{j+1/2}^{(1)}(t), \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^x u_{j+1/2}) + c_x \Lambda_2^x u_{j+1/2} = v \Lambda_3^x u_{j+1/2} + \Phi_{j+1/2}^{(2)}(t), \end{cases} \quad (4)$$

где индекс  $j = \overline{0, N_x - 1}$ . Ради краткости записи мы пользуемся сеточными операторами

$$\begin{aligned} A_0^x u_{j+1/2} &= \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{h_x}{12}(v_{x,j+1} - v_{x,j}), & \Lambda_1^x u_{j+1/2} &= \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x}, \\ \Lambda_2^x u_{j+1/2} &= \frac{v_{x,j+1} - v_{x,j}}{h_x}, & \Lambda_3^x u_{j+1/2} &= \frac{12}{h_x^2} \left( \frac{v_{x,j} + v_{x,j+1}}{2} - \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Члены  $\Phi_{j+1/2}^{(1)}(t)$ ,  $\Phi_{j+1/2}^{(2)}(t)$  даются выражениями:

$$\Phi_{j+1/2}^{(1)}(t) = \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,t) dx, \quad \Phi_{j+1/2}^{(2)}(t) = \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx.$$

Отметим, что разностные операторы (5) могут быть представлены как комбинации следующих трех более простых разностных операторов:

$$M_0^x U_{j+1/2} = \frac{U_j + U_{j+1}}{2}, \quad \Delta_0^x U_{j+1/2} = U_{j+1} - U_j, \quad P^x u_j = v_{x,j}, \quad (6)$$

где в роли сеточной функции  $U_j$  может выступать как функция  $u_j$ , так и функция  $v_{x,j}$ .

Очевидно, величины  $u_j$  и  $v_{x,j}$  в схеме (4) больше не являются точными значениями функций  $u(x,t)$  и  $v_x(x,t)$  соответственно в узлах сетки  $\Omega_x$ , а лишь приближают их.

Полудискретная бикомпактная схема (4) консервативна и имеет четвертый порядок аппроксимации по переменной  $x$ . Для получения полностью дискретных бикомпактных схем для уравнения (1) необходимо применять к системе ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) (4) те или иные методы интегрирования по времени, например, это могут быть методы Рунге-Кутты.

Схема (4) в случае  $\nu=1$ ,  $c_x=0$  и  $f(x,t)=0$  в точности переходит в уже известную бикомпактную схему [7, формулы (9), (10)]. Тем самым, результатом решения задачи 1 является полином (2).

**Задача 2.** Предметом нашего рассмотрения теперь является двумерная версия уравнения (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D = (0, x_{\max}) \times (0, y_{\max}), \quad t > 0, \quad (7)$$

где  $u = u(x, y, t)$  – искомая функция,  $\nu > 0$ ,  $c_x$ ,  $c_y$  – постоянные коэффициенты,  $f(x, y, t)$  – заданная функция-источник. Наряду с искомой функцией мы будем также иметь дело и со следующими тремя ее частными производными по  $x, y$ :

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Выведем полудискретную бикомпактную схему для уравнения (7), применяя тот же метод, что и выше в одномерном случае.

Аналогично тому, как это делалось в задаче 1, введем сетку  $\Omega_x = \{x_j\}_{j=0}^{N_x}$  на



отрезке  $x \in [0, x_{\max}]$  и сетку  $\Omega_y = \{y_k\}_{k=0}^{N_y}$  на отрезке  $y \in [0, y_{\max}]$ ; декартово произведение этих сеток  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$  образует сетку в замкнутой области  $\overline{D}$ . Шаг по  $y$  суть  $h_{y,k+1/2} = y_{k+1} - y_k$  ( $k = \overline{0, N_y - 1}$ ). Подобно шагу  $h_x$ , нижний индекс  $k + 1/2$  у шага  $h_y$  далее опускается всюду, где это допустимо. Ниже нам понадобятся еще несколько объектов и обозначений для них: мультииндекс  $C = (j + 1/2, k + 1/2)$ , где  $j = \overline{0, N_x - 1}$ ,  $k = \overline{0, N_y - 1}$  (всегда, независимо от контекста), и ячейка  $K_C = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ .

Пользуясь значениями

$$u_{j,k} = u(x_j, y_k, t), \quad v_{x,j,k} = v_x(x_j, y_k, t), \quad v_{y,j,k} = v_y(x_j, y_k, t), \quad v_{xy,j,k} = v_{xy}(x_j, y_k, t)$$

функций  $u(x, y, t)$ ,  $v_x(x, y, t)$ ,  $v_y(x, y, t)$ ,  $v_{xy}(x, y, t)$  соответственно в узлах сетки  $\Omega$ , мы строим в каждой ячейке  $K_C$  сетки  $\Omega$  двумерный аналог полинома (2) – бикубический интерполяционный полином Эрмита для функции  $u(x, y, t)$ :

$$u_h(x, y, t; K_C) = (\hat{a}_0^y + \eta \hat{a}_1^y + \eta^2 \hat{a}_2^y + \eta^3 \hat{a}_3^y)(\hat{a}_0^x + \xi \hat{a}_1^x + \xi^2 \hat{a}_2^x + \xi^3 \hat{a}_3^x) u_C, \quad (x, y) \in K_C, \quad (8)$$

где  $\eta = (y - y_{k+1/2})/h_y$ ,  $y_{k+1/2} = (y_k + y_{k+1})/2$ , а одномерные сеточные операторы  $\hat{a}_m^d$  ( $m = \overline{0, 3}$ ,  $d = x, y$ ) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0^d &= M_0^d - \frac{h_d}{8} \Delta_0^d P^d, & \hat{a}_1^d &= \frac{3\Delta_0^d - h_d M_0^d P^d}{2}, \\ \hat{a}_2^d &= \frac{h_d}{2} \Delta_0^d P^d, & \hat{a}_3^d &= 2(h_d M_0^d P^d - \Delta_0^d), \quad d = x, y. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения для операторов (9) непосредственно следуют из выражений (3) для коэффициентов  $a_m$  полинома (2) одной переменной, а также из определения (6) для операторов  $M_0^x$ ,  $\Delta_0^x$ ,  $P^x$ . Уточним, что операторы с верхним индексом « $x$ » действуют только по первому индексу сеточной функции, а операторы с верхним индексом « $y$ » – только по второму ее индексу. Кроме того, необходимо пояснить принцип действия операторов  $P^x$ ,  $P^y$ :

$$P^x u_{j,k} = v_{x,j,k}, \quad P^y u_{j,k} = v_{y,j,k}, \quad P^x P^y u_{j,k} = P^y P^x u_{j,k} = v_{xy,j,k}.$$

Если функция  $u(x, y, t)$  достаточно гладкая, то полином (8) аппроксимирует ее на  $K_C$  с погрешностью  $O(h^4)$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $h = \max(h_x, h_y)$ . Совокупность полиномов (8) во всей

замкнутой области  $\bar{D}$  составляет двумерный сплайн гладкости 1.

Наконец, мы берем само уравнение (7) и его дифференциальные следствия – уравнения, получающиеся из (1) взятием производных  $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial^2/\partial x \partial y$  от обеих его частей, интегрируем четыре этих уравнения по ячейке  $K_C$  при  $t = \text{const}$ , подставляем вместо функции  $u(x, y, t)$  полином (8) и делим результат интегрирования на произведение шагов  $h_x$  и  $h_y$ . Результатом этих действий станет искомая полудискретная бикompактная схема для уравнения (7):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A_0^y A_0^x u_C) + c_x A_0^y \Lambda_1^x u_C + c_y \Lambda_1^y A_0^x u_C = v(A_0^y \Lambda_2^x u_C + \Lambda_2^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(1)}(t), \\ \frac{d}{dt}(A_0^y \Lambda_1^x u_C) + c_x A_0^y \Lambda_2^x u_C + c_y \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C = v(A_0^y \Lambda_3^x u_C + \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(2)}(t), \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^y A_0^x u_C) + c_x \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + c_y \Lambda_2^y A_0^x u_C = v(\Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + \Lambda_3^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(3)}(t), \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C) + c_x \Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + c_y \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C = v(\Lambda_1^y \Lambda_3^x u_C + \Lambda_3^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(4)}(t), \end{cases} \quad (10)$$

где члены  $\Phi_C^{(1)}(t)$ ,  $\Phi_C^{(2)}(t)$ ,  $\Phi_C^{(3)}(t)$ ,  $\Phi_C^{(4)}(t)$  даются выражениями:

$$\begin{aligned} \Phi_C^{(1)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} f(x, y, t) dx dy, & \Phi_C^{(2)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} dx dy, \\ \Phi_C^{(3)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} dx dy, & \Phi_C^{(4)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x \partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Полудискретная бикompактная схема (10) консервативна и имеет четвертый порядок аппроксимации по переменным  $x, y$ . Для получения полностью дискретных бикompактных схем для уравнения (7) необходимо применять к системе ОДУ (10) те или иные методы интегрирования по времени.

Обсудим теперь постановку начальных и граничных условий для полудискретной бикompактной схемы (10). Пусть начальное условие для уравнения (7) имеет вид:

$$u|_{t=0} = u_*(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}.$$

Тогда начальное условие для схемы (10) ставится так:

$$\begin{aligned} u_{j,k}|_{t=0} &= u_*(x_j, y_k), & v_{x,j,k}|_{t=0} &= \frac{\partial u_*(x_j, y_k)}{\partial x}, & v_{y,j,k}|_{t=0} &= \frac{\partial u_*(x_j, y_k)}{\partial y}, \\ v_{xy,j,k}|_{t=0} &= \frac{\partial^2 u_*(x_j, y_k)}{\partial x \partial y}, & j &= \overline{0, N_x}, & k &= \overline{0, N_y}. \end{aligned}$$

Пусть граничные условия для уравнения (7) имеют вид:

$$\begin{aligned}\alpha_1 u + \beta_1 v_x|_{x=0} &= \mu_1(y, t), & \alpha_2 u + \beta_2 v_x|_{x=x_{\max}} &= \mu_2(y, t), \\ \alpha_3 u + \beta_3 v_y|_{y=0} &= \mu_3(x, t), & \alpha_4 u + \beta_4 v_y|_{y=y_{\max}} &= \mu_4(x, t), \\ 0 < y < y_{\max}, & 0 \leq x \leq x_{\max}, & t > 0,\end{aligned}$$

где  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  ( $m = \overline{1,4}$ ) – постоянные параметры. Тогда граничные условия для схемы (10) ставятся так:

$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha_1 u_{0,k} + \beta_1 v_{x,0,k})}{dt} &= \frac{\partial \mu_1(y_k, t)}{\partial t}, & \frac{d(\alpha_1 u_{N_x,k} + \beta_1 v_{x,N_x,k})}{dt} &= \frac{\partial \mu_2(y_k, t)}{\partial t}, \\ \frac{d(\alpha_3 u_{j,0} + \beta_3 v_{y,j,0})}{dt} &= \frac{\partial \mu_3(x_j, t)}{\partial t}, & \frac{d(\alpha_4 u_{j,N_y} + \beta_4 v_{y,j,N_y})}{dt} &= \frac{\partial \mu_4(x_j, t)}{\partial t}, \\ \frac{d(\alpha_1 v_{y,0,k} + \beta_1 v_{xy,0,k})}{dt} &= \frac{\partial^2 \mu_1(y_k, t)}{\partial y \partial t}, & \frac{d(\alpha_1 v_{y,N_x,k} + \beta_1 v_{xy,N_x,k})}{dt} &= \frac{\partial^2 \mu_2(y_k, t)}{\partial y \partial t}, \\ \frac{d(\alpha_3 v_{x,j,0} + \beta_3 v_{xy,j,0})}{dt} &= \frac{\partial^2 \mu_3(x_j, t)}{\partial x \partial t}, & \frac{d(\alpha_4 v_{x,j,N_y} + \beta_4 v_{xy,j,N_y})}{dt} &= \frac{\partial^2 \mu_4(x_j, t)}{\partial x \partial t},\end{aligned} \quad (11)$$

$$k = \overline{0, N_y} \text{ (в первой строке от 1 до } N_y - 1), \quad j = \overline{0, N_x}, \quad t > 0.$$

При переходе от полудискретной бикompактной схемы (10) к какой-либо полностью дискретной бикompактной схеме граничные условия (11) интегрируются по времени тем же самым методом, что и система ОДУ (10).

Обратимся теперь к реализации полностью дискретных бикompактных схем, получаемых из полудискретной бикompактной схемы (10). Из всех возможных методов интегрирования по времени мы ограничимся DIRK-методами (diagonally implicit Runge-Kutta, диагонально- неявные методы Рунге-Кутты), так как они одношаговые и сбалансированные по устойчивости/экономичности: с одной стороны, DIRK-методы могут быть A- или L-устойчивыми, с другой стороны, они несомненно экономичнее своих полностью неявных аналогов. Полностью дискретная бикompактная схема с интегрированием по времени неявным методом Эйлера назовем *базовой бикompактной схемой*.

Любая бикompактная схема с интегрированием по времени DIRK-методом сводится по своей реализации к композиции базовых бикompактных схем с надлежаще подобранными шагами по времени, промежуточными начальными и граничными условиями. Эта связь между бикompактными схемами следует из хорошо известной аналогичной связи между DIRK-методами и неявным методом Эйлера.

Итак, запишем базовую бикompактную схему для уравнения (7):

$$\begin{cases} [A_0^y A_0^x + \tau(c_x A_0^y \Lambda_1^x + c_y \Lambda_1^y A_0^x - \nu A_0^y \Lambda_2^x - \nu \Lambda_2^y A_0^x)] u_C^{n+1} - A_0^y A_0^x u_C^n - \tau \Phi_C^{(1)}(t^{n+1}) = 0, \\ [A_0^y \Lambda_1^x + \tau(c_x A_0^y \Lambda_2^x + c_y \Lambda_1^y \Lambda_1^x - \nu A_0^y \Lambda_3^x - \nu \Lambda_2^y \Lambda_1^x)] u_C^{n+1} - A_0^y \Lambda_1^x u_C^n - \tau \Phi_C^{(2)}(t^{n+1}) = 0, \\ [A_0^y \Lambda_1^x + \tau(c_x A_0^y \Lambda_2^x + c_y \Lambda_1^y \Lambda_1^x - \nu A_0^y \Lambda_3^x - \nu \Lambda_2^y \Lambda_1^x)] u_C^{n+1} - A_0^y \Lambda_1^x u_C^n - \tau \Phi_C^{(3)}(t^{n+1}) = 0, \\ [\Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau(c_x \Lambda_1^y \Lambda_2^x + c_y \Lambda_2^y \Lambda_1^x - \nu \Lambda_1^y \Lambda_3^x - \nu \Lambda_3^y \Lambda_1^x)] u_C^{n+1} - \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C^n - \tau \Phi_C^{(4)}(t^{n+1}) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $t^n$  –  $n$ -й слой по времени ( $t^0 = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $u^n$  (вместе с  $v_x^n$ ,  $v_y^n$ ,  $v_{xy}^n$ ) – численное решение на слое  $t^n$ ,  $\tau^{n+1} = t^{n+1} - t^n \equiv \tau$  – шаг по времени (в общем случае, переменный).

Для реализации схемы (12) воспользуемся методом ИПФ, см., например, работу [8].

Опуская выкладки, приведем окончательные уравнения этого метода:

$$\begin{cases} B_1^y(\tau) B_1^x(\tau) \delta u_C^{(s+1)} = R_{1,C}^{(s)}, \\ B_1^y(\tau) B_2^x(\tau) \delta u_C^{(s+1)} = R_{2,C}^{(s)}, \\ B_2^y(\tau) B_1^x(\tau) \delta u_C^{(s+1)} = R_{3,C}^{(s)}, \\ B_2^y(\tau) B_2^x(\tau) \delta u_C^{(s+1)} = R_{4,C}^{(s)}. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $u^{(s)}$  (и  $v_x^{(s)}$ ,  $v_y^{(s)}$ ,  $v_{xy}^{(s)}$ ) – приближение номер  $s$  к численному решению  $u^{n+1}$  (и  $v_x^{n+1}$ ,  $v_y^{n+1}$ ,  $v_{xy}^{n+1}$  соответственно) на рассчитываемом слое  $t^{n+1}$  ( $s = \overline{0, s_{\max}}$ );  $\delta u^{(s+1)} \equiv u^{(s+1)} - u^{(s)}$  (вместе с  $\delta v_x^{(s+1)}$ ,  $\delta v_y^{(s+1)}$ ,  $\delta v_{xy}^{(s+1)}$ ) – приращение решения за итерацию;  $R_{m,C}^{(s)}$  – левая часть уравнения номер  $m = \overline{1, 4}$  базовой схемы (12), посчитанная на решении с  $s$ -й итерации (то есть с подстановкой  $u^{(s)}$  вместо  $u^{n+1}$ ) и умноженная на  $(-1)$ ;  $B_{1,2}^d(\tau)$  ( $d = x, y$ ) – сеточные операторы, которые определяются формулами:

$$B_1^d(\tau) = A_0^d + c_d \tau \Lambda_1^d - \nu \tau \Lambda_2^d, \quad B_2^d(\tau) = \Lambda_1^d + c_d \tau \Lambda_2^d - \nu \tau \Lambda_3^d, \quad d = x, y.$$

В качестве начального приближения выбирается решение с предыдущего слоя:  $u^{(0)} = u^n$  (аналогично  $v_x^{(0)} = v_x^n$ ,  $v_y^{(0)} = v_y^n$ ,  $v_{xy}^{(0)} = v_{xy}^n$ ). Итерационный процесс (13) заканчивается либо по достижении максимальной итерации  $s_{\max}$ , либо по выполнении условия

$$\left\| \delta u^{(s+1)} \right\|_{\infty} \leq \text{rtol} \cdot \left\| u^{(s)} \right\|_{\infty}, \quad \left\| u^n \right\|_{\infty} = \max_{\Omega} |u_{j,k}^n|,$$

где  $\text{rtol} > 0$  – наперед заданная относительная точность итераций.

Нахождение  $\delta u^{(s+1)}$  из уравнений (13) сводится к обращению одномерных сеточных операторов последовательно сначала по  $y$ , затем по  $x$ , которое, в свою очередь, сводится к независимым одномерным двухточечным прогонкам.

Продемонстрируем высокую точность бикомпактных схем для уравнения (7) на двух

вычислительных примерах.

*Пример 1.* Исследуем сеточную сходимость базовой бикомпактной схемы (12) на стационарном решении уравнения (7) при нулевом источнике ( $f(x, y, t) \equiv 0$ ):

$$u(x, y, \infty) = \cos[2\pi(c_y x - c_x y)] \exp \left[ -\frac{1 - \sqrt{1 + (4\pi\nu)^2}}{2\nu} (c_x x + c_y y) \right]. \quad (14)$$

Расчетная область  $D = (0,1)^2$ . Положим параметры  $c_x = 1$ ,  $c_y = 2$ . Вычисления проведем на сгущающихся сетках при трех различных значениях коэффициента  $\nu$ ; их и соответствующие им параметры сеток и схемы удобно привести в виде таблицы:

$\nu$	$\mathbf{R}$	$N_x = N_y$	$2\kappa_x^{\text{hyp}} = \kappa_y^{\text{hyp}}$
$\sqrt{5} \cdot 10^{-4}$	$10^4$	50, 100, 200, 400	1
$\sqrt{5}$	1	5, 10, 20, 40, 80	0.1
$\sqrt{5} \cdot 10^4$	$10^{-4}$	5, 10, 20, 40	$10^{-5}$

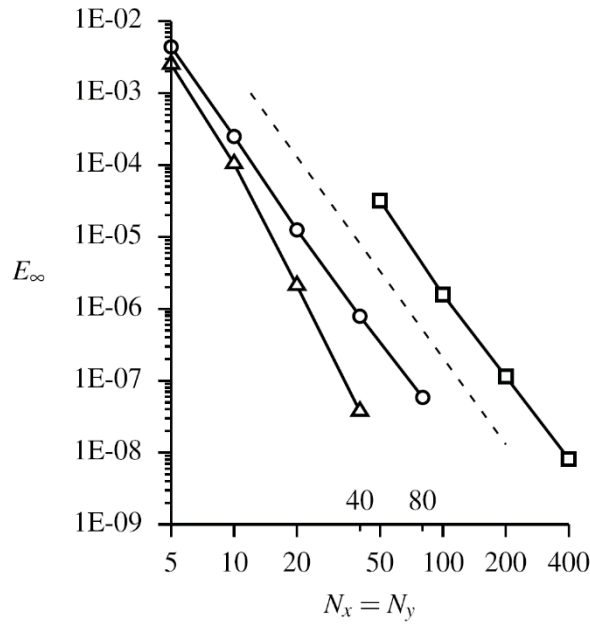
где  $\mathbf{R}$  – аналог числа Рейнольдса, а  $\kappa_{x,y}^{\text{hyp}}$  – гиперболические числа Куранта:

$$\mathbf{R} = \nu^{-1} \sqrt{c_x^2 + c_y^2}, \quad \kappa_d^{\text{hyp}} = \frac{c_d \tau}{h_d}, \quad d = x, y.$$

Параметр  $\text{rtol} = 10^{-10}$ . Счет по времени велся от тривиального начального условия на установление, критерием которого полагалось выполнение неравенства:

$$\|u^{n+1} - u^n\|_{\infty} \leq \text{rtol} \cdot \|u^n\|_{\infty},$$

На рис. 1 приведены графики абсолютных погрешностей  $u$  в норме  $L_{\infty}$  в зависимости от  $N_x = N_y$ . Из них ясно, что базовая бикомпактная схема (12) сходится на стационарном решении (14) уравнения (7) с ожидаемым четвертым порядком.



**Рис. 1.** Абсолютные погрешности  $u$  в норме  $L_\infty$  для базовой бикompактной схемы в примере 1. Кривые с квадратными, круглыми, треугольными маркерами соответствуют расчетам при  $R = 10^4, 1, 10^{-4}$ . Пунктир – зависимость  $O(h^4)$ .

*Пример 2.* Рассмотрим полностью дискретную бикompактную схему SDIRK2B4. Она получается из полудискретной схемы (10) после применения для счета по времени  $L$ -устойчивого DIRK-метода второго порядка:

$$\begin{array}{c|cc} a & a & \\ \hline 1 & 1-a & a \\ \hline & 1-a & a \end{array} \quad a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

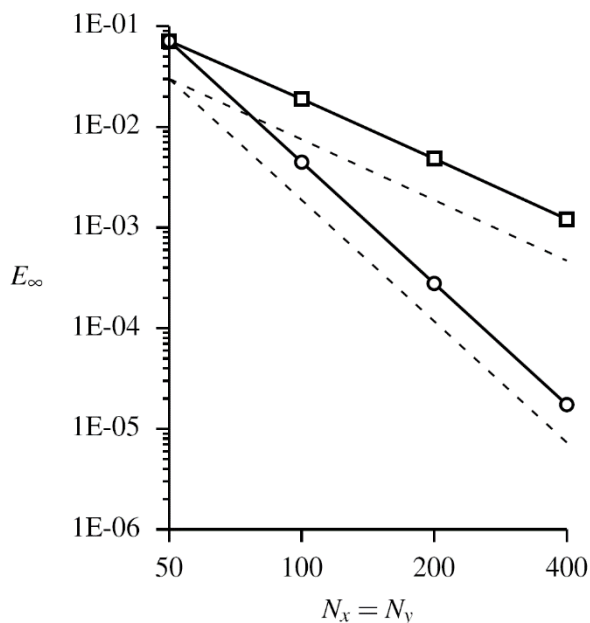
Исследуем сеточную сходимость схемы SDIRK2B4 на нестационарном решении уравнения (7) при нулевом источнике:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4t+1} \exp \left[ -\frac{(x - c_x t - 0.5)^2 + (y - c_y t - 0.5)^2}{\nu(4t+1)} \right]. \quad (15)$$

Расчетная область  $D = (0, 2)^2$ . Параметры  $c_x = c_y = 10$ ,  $\nu = 0.01$  ( $R = \sqrt{2} \cdot 10^3$ ). Вычисления выполним до момента времени  $t = 0.1$  на сгущающихся сетках с  $N_x = N_y = 50, 100, 200, 400$  при гиперболических числах Куранта  $\kappa_{x,y}^{\text{hyp}} = 0.5$  (шаг  $\tau = O(h)$  при  $h \rightarrow 0$ , параболические числа Куранта  $\kappa_{x,y}^{\text{par}} = \nu\tau/h_{x,y}^2 = O(1/h)$ ) и  $\kappa_{x,y}^{\text{hyp}} = 12.5/N_x = O(h)$  (шаг  $\tau = O(h^2)$ , числа  $\kappa_{x,y}^{\text{par}} = O(1)$ ).

На рис. 2 приведены графики абсолютных погрешностей  $u$  в норме  $L_\infty$  в зависимости от  $N_x = N_y$ . Хорошо видно, что апостериорные порядки сходимости бикompактной схемы

SDIRK2B4 на решении (15) совпадают с ожидаемыми теоретическими – вторым при  $\tau = O(h)$  и четвертым при  $\tau = O(h^2)$ .



**Рис. 2.** Абсолютные погрешности  $u$  в норме  $L_\infty$  для бикомпактной схемы SDIRK2B4 в примере 2. Кривые с квадратными и круглыми маркерами соответствуют расчетам при  $\tau = O(h)$  и  $\tau = O(h^2)$ . Пунктир – зависимости  $O(h^2)$  и  $O(h^4)$ .

Таким образом, результатами решения задачи 2 являются: полудискретная бикомпактная схема (10) четвертого порядка аппроксимации по пространству для уравнения (7) (и метод ее вывода), метод ИПФ (13) (применительно к базовой бикомпактной схеме (12)), демонстрация на рис. 1, 2 высокой точности полностью дискретных бикомпактных схем на основе (10).

**Задача 3.** Пользуясь результатами решения задач 1-2 и уже имеющимися наработками по бикомпактным схемам для уравнений гиперболического типа, построим высокоточную бикомпактную схему для нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса в случае изотермических течений несжимаемой жидкости. Затем рассчитаем по этой схеме известную задачу о распаде вихря Тейлора-Грина (в турбулентном режиме).

Дадим краткое описание вычислительного алгоритма, так как полное, максимально подробное его описание выходит за рамки настоящего отчета.

Запишем вышеназванные уравнения Навье-Стокса в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (x, y, z) \in D = (0, 2\pi)^3, \quad t > 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  – вектор скорости жидкости,  $p = p(x, y, z, t)$  – давление жидкости,

$Re = \text{const} > 0$  – число Рейнольдса,  $\otimes$  – знак тензорного произведения. Чтобы построить бикомпактную схему для системы уравнений (16), применяется метод расщепления по физическим процессам Марчука-Стрэнга. Система (16) разбивается на конвективную часть без давления,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (17)$$

вязкую часть,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \quad (18)$$

и часть, отвечающую за силы давления и несжимаемость жидкости,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (19)$$

Часть (17) считается по локально-одномерной бикомпактной схеме, разработанной ранее для уравнений гиперболического типа (см., например, [4]). В этой схеме используется консервативная монотонизация [3]. Для счета части (18) и уравнения Пуассона для давления, вытекающего из (19), применяются бикомпактные схемы с пространственной аппроксимацией, разработанной в настоящем проекте (см. задачи 1-2). Все производные по времени аппроксимируются методом трапеций, у всех бикомпактных схем четвертый порядок аппроксимации по пространству. В итоге, результирующая бикомпактная схема для всей системы (16) обладает четвертым порядком аппроксимации по пространству и вторым – по времени.

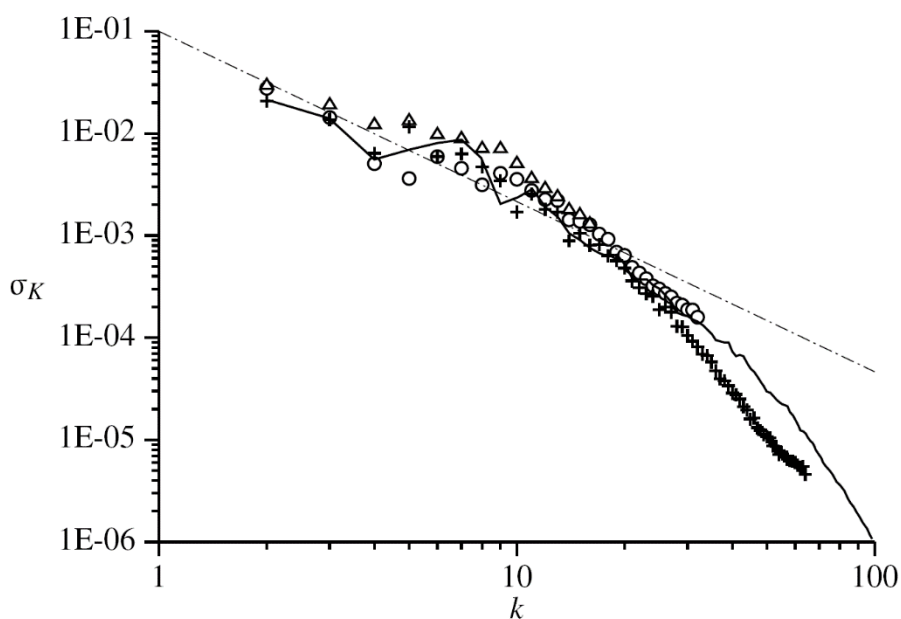
Начальные условия в задаче о распаде вихря Тейлора-Грина имеют вид:

$$v_x|_{t=0} = \sin x \cos y \cos z, \quad v_y|_{t=0} = -\cos x \sin y \cos z, \quad v_z|_{t=0} = 0, \\ p|_{t=0} = \frac{1}{16} (\cos 2x + \cos 2y)(2 + \cos 2z), \quad (x, y, z) \in \bar{D}.$$

Граничные условия – периодические. Расчеты выполним при  $Re = 1600$  (распад вихря происходит в турбулентном режиме) на сетках  $32^3$ ,  $64^3$ ,  $128^3$  ячеек, с шагами по времени  $\tau = 0.04, 0.02, 0.01$  соответственно, параметр метода консервативной монотонизации  $C_1 \geq 0$  положим равным 0.5 для расчета на сетке  $128^3$  ячеек и равным 0 для остальных расчетов (при  $C_1 = 0$  монотонизации нет, при  $C_1 \rightarrow \infty$  она максимальна и оставляет от решения только интегральные средние, характерное значение  $C_1$  при расчетах газодинамических течений с сильными разрывами равняется 5).



На рис. 3 показаны результаты проведенных расчетов в виде спектров кинетической энергии жидкости при  $t=8.5$ . Для сравнения на нем также изображен эталонный спектр, полученный по псевдо-спектральной схеме с очень высоким разрешением в  $512^3$  степеней свободы. Очевидно, разработанная бикомпактная схема корректно, без «загибов вниз» воспроизводит инерционный участок спектра, причем делает она это даже на сетке  $32^3$  ячеек, недостаточной для разрешения всех вихрей среднего масштаба. Влияние консервативной монотонизации сказывается только в несущественном отклонении на диссипативном участке. Отсюда можно сделать вывод, что бикомпактные схемы действительно перспективны для расчетов турбулентных течений вязкой жидкости по методике LES/ILES – это и есть основной результат решения задачи 3.



**Рис. 3.** Спектры кинетической энергии жидкости в задаче о распаде вихря Тейлора-Грина, число Рейнольдса 1600 (турбулентный режим распада), момент времени  $t=8.5$ . Треугольные, круглые, крестовидные маркеры – результаты расчетов по бикомпактной схеме на сетках  $32^3$ ,  $64^3$ ,  $128^3$  ячеек соответственно. Сплошная кривая – эталон, полученный по псевдо-спектральной схеме с разрешением  $512^3$  степеней свободы. Штрих-пунктирная прямая – наклон  $(-5/3)$

**Задача 4. Анализ влияния различных типов лимитеров на точность разрывного метода Галеркина и определены наиболее подходящие для практического применения.**

Для одного из наиболее актуальных на сегодняшний день высокоточных методов, а именно разрывного метода Галеркина (РМГ) проведен анализ различных типов лимитирующих функций и создание нового лимитера. Основной целью данного исследования

является выяснение влияния различных типов лимитеров на точность и робастность разрывного метода Галеркина. Как известно, одним из несомненных преимуществ разрывного метода Галеркина является возможность его применения на сетках произвольной структуры [9] при решении сложных производственных задач. В настоящее время разрывный метод Галеркина хорошо разработан как для структурированных [10,11], так и для неструктурированных сеток, содержащих как элементы только одного типа: тетраэдральные [10, 12-14] или гексаэдральные [15], а также для сеток смешанной структуры [16]. Однако, вопрос выбора наиболее подходящего для конкретных классов задач лимитера до конца не изучен.

Наиболее широко используемым, является классический лимитер Кокбурна [17,18].

Д

а

$$\tilde{u}_1 = 2 \cdot \min \text{mod} \left( u(x_{i+1/2}) - u_{0i}, \alpha \cdot (\bar{u}_{i+1/2} - u_{0i}), \alpha \cdot (u_{0i} - \bar{u}_{i-1/2}) \right)$$

н

н

Е

Ы

М

Й

В

Е

Л

Д

и

$$\bar{u}_{i+1/2} = \frac{u_{0i+1} + u_{0i}}{2}, \quad \bar{u}_{i-1/2} = \frac{u_{0i-1} + u_{0i}}{2}$$

$$\min \text{mod}(a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} s \cdot \min(|a_1|, \dots, |a_N|), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_N), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

л

е

р

е

р

е

а

р

т

в

р

а

о

л

п

д

.

а

Д

н

н

С

н

М

е

т

р

и

и

и

и

и

Данный лимитер разработан для тетраэдральных сеток, хотя идея данного лимитера легко реализуется в многомерном случае на сетках произвольной структуры. Нужно учитывать, что данный лимитер, как и все TVD лимитеры снижает точность получаемого решения до первого.

В последнее время активно развиваются различные подходы к решению этой проблемы. Один из подходов к созданию лимитера повышенного порядка точности предложен в работах Криводоновой [19,20].

В

Начиная со старших коэффициентов  $k=p$ , заменим  $\tilde{u}_k^i$  на

$$\tilde{u}_k^i = \min \text{mod} \left( \tilde{u}_k^i, \alpha_k \left( \tilde{u}_{k-1}^{i+1} - \tilde{u}_{k-1}^i \right), \alpha_k \left( \tilde{u}_{k-1}^i - \tilde{u}_{k-1}^{i-1} \right) \right).$$

В настоящий момент данный лимитер разработан только для структурированных сеток.

р

и

и

и

и

и

и

и

и

решения разрывным методом Галеркина сформулируем задачу:

Распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции:

$$\rho = \begin{cases} 1 + e^{-2\frac{l^2}{l^2-x^2}}, & |x| < l \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad x \in [-1, 1], \quad l = 0.2, \quad \gamma = 5/3$$

Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта  $R^+$   $\varepsilon = \rho^{(\gamma-1)}$ ,  $u = \frac{-2\sqrt{\varepsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}$ ,  $E = \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2}$

На границах области заданы постоянные граничные условия:

$$\rho(-1, t) = 1, \quad u(-1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(-1, t) = 6, \quad \rho(1, t) = 1, \quad u(1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(1, t) = 6.$$

Решение данной задачи сохраняет гладкость до того момента времени, пока характеристики, выпущенные из разных точек, не начнут пересекаться.

Таблица 1

		Без лимитера		Лимитер Кокбурна		Моментный лимитер	
$L^1$	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	7.46e - 06		2.45e - 04		3.12e - 05	
	1000	6.99e - 07	3.42	5.38e - 05	2.19	3.18e - 06	3.29
	2000	7.61e - 08	3.20	1.18e - 05	2.19	3.08e - 07	3.37
	4000	9.37e - 09	3.02	2.76e - 06	2.10	2.71e - 08	3.50
$L^2$	500	4.49e - 05		8.13e - 04		1.95e - 04	
	1000	4.46e - 06	3.33	1.84e - 04	2.14	2.63e - 05	2.89
	2000	4.98e - 07	3.16	3.94e - 05	2.23	3.25e - 06	3.02
	4000	6.10e - 08	3.03	8.72e - 06	2.18	3.56e - 07	3.19
	$L^4$	500	2.04e - 04		3.21e - 03		8.13e - 04
1000		2.19e - 05	3.22	7.88e - 04	2.03	1.25e - 04	2.70
2000		2.84e - 06	2.95	1.68e - 04	2.23	1.81e - 05	2.78
4000		3.57e - 07	2.99	3.61e - 05	2.22	2.38e - 06	2.93

Как видно из Таблицы 1 при решении РМГ с квадратичными базисными функциями без использования лимитеров получаем третий порядок точности, при использовании моментного лимитера, порядок точности сохраняется, при использовании лимитера Кокбурна порядок точности на гладком решении падает до второго.

Другой подход к созданию лимитера повышенного порядка точности заключается в использовании WENO-ограничителя [21-24].

Обозначив  $P_0, P_1, P_2$  полиномы на  $I_{j-1}, I_j, I_{j+1}$  ячейках соответственно. Новый полином получается следующим образом

$$P_1^{new}(x) = \omega_0 \tilde{P}_0(x) + \omega_1 P_1(x) + \omega_2 \tilde{P}_2(x),$$

$$\text{где } \tilde{P}_0 = P_0 - \bar{P}_0 + \bar{P}_1, \quad \tilde{P}_2 = P_2 - \bar{P}_2 + \bar{P}_2, \quad \bar{P}_0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} P_0(x) dx, \quad \bar{P}_1 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} P_1(x) dx, \quad \bar{P}_2 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} P_2(x) dx.$$

Причем,  $\bar{P}_1^{new}(x) = \bar{P}_1(x)$ ,  $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$ . Нормализованные веса вычисляются по формулам

$$\omega_l = \frac{\bar{\omega}_l}{\sum_{k=0}^2 \bar{\omega}_k}, \quad \bar{\omega}_l = \frac{\gamma_l}{(\varepsilon + \beta_l)^r}, \quad \beta_l = \sum_{s=1}^p \int_{I_j} \Delta x_j^{2s-1} \left( \frac{\partial^s}{\partial x^s} P_l(x) \right)^2 dx,$$

$$\gamma_0 = 0.001, \quad \gamma_1 = 0.998, \quad \gamma_2 = 0.001.$$

В работе [25] предложен сглаживающий оператор нового типа на основе усреднения решений, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных.

Сглаживающий полином получается следующим образом

$$P_j^{sm} = \bar{P}_j + P_j^0 \left( 1 - \max(\alpha_{j+1/2}, \alpha_{j-1/2}) \right), \quad P_j^0 = P_j - \bar{P}_j, \quad \text{где} \quad P_j = u_0^j + u_1^j \phi_1 + u_2^j \phi_2 \quad \text{и}$$

$P_{j+1} = u_0^{j+1} + u_1^{j+1} \phi_1 + u_2^{j+1} \phi_2$  исходные полиномы на  $j$ ой и  $j+1$ ой ячейках соответственно.

Коэффициенты определяются как

$$\alpha_{j+1/2} = \mu_{j+1/2} \beta_{j+1/2} \frac{c_{j+1/2} \Delta t}{\Delta x},$$

$$\mu_{j+1/2} = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+3/2}} (P_j - P_{j+1})^2 dx \left( \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+3/2}} (P_j - P_{j+1/2}^{av})^2 dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+3/2}} (P_{j+1} - P_{j+1/2}^{av})^2 dx \right)^{-1}, \quad P_{j+1/2}^{av} = \frac{\bar{P}_j + \bar{P}_{j+1}}{2}$$

В данной работе рассмотрены хорошо зарекомендовавший себя сглаживающий оператор на основе WENO-реконструкции и сглаживающий оператор нового типа на основе усреднения решений, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных. Проведено сравнение действия данных лимитеров при решении серии тестовых задач. Показано, что применение предложенного сглаживающего оператора, не уступает действию WENO-лимитера, а в некоторых случаях превосходит по точности получаемого решения (Таблица 2), что подтверждено численными исследованиями.

Таблица 2

		ошибка	порядок	ошибка	порядок

WENO					
$k \sim \rho_1/\bar{\rho}$					
		e		e	
		e		e	
		e		e	
		e		e	

В работах [20,28] предложены лимитеры не прибегающие к использованию minmod процедуры, что является большим преимуществом данных лимитеров. В работе [20] дополнительно предложен анализатор разрывов решения. Данный подход позволяет использовать лимитеры в ограниченной области. В этой же работе предложена модификация РМГ для двумерного случая, обеспечивающая возможность плавного перехода от схемы высокого порядка точности к монотонной схеме первого порядка точности в областях сингулярности течения.

Еще один принципиально другой способ монотонизации решения, основан на введении искусственной вязкости в численную схему [29,30], этот подход предполагает использование эмпирических констант, что усложняет его применение к решению реальных задач.

Наиболее простая и эффективная реализация лимитера предложена в работе [31]. данный лимитер SLOP-лимитер легко реализуется на сетках с произвольной формой ячеек.

Вектор полиномов консервативных переменных системы уравнений Эйлера  $U_k(x) = (\rho_k(x), (\rho u)_k(x), (\rho v)_k(x), (\rho w)_k(x), E_k(x))^T$  модифицируем в  $\tilde{U}_k(x)$  так, чтобы  $\tilde{U}_k(x)$  обеспечивал положительность решения для плотности и давления во всех квадратурных точках, сохранял консервативность решения  $\frac{1}{S_{T_k}} \int_{T_k} \tilde{U}_k(x, y) dx dy = \bar{U}_k$ , где

Е На первом шаге необходимо выбрать максимальное и минимальное значения давления  $\bar{p}$  соседним ячейкам

В  $p_{\max} = \max(\bar{p}_i), \quad p_{\min} = \min(\bar{p}_i), \quad i = 1, N$

Е

Д

Е

Обозначив  $p^+ = (1 + \varepsilon)p_{\max}$   $p^- = (1 - \varepsilon)p_{\min}$ , где  $\varepsilon$  некоторая маленькая положительная константа, переходим к следующему этапу.

Если, в какой-либо квадратурной точке  $k$  ячейки значение давления выходит за границы  $[p^-, p^+]$ , умножим исходные полиномы на некоторую положительную величину

$$\alpha = \min\left(\frac{p^+}{p_{\max}^K}, \frac{p_{\min}^K}{p^-}\right) \text{ т.е.}$$

$$\hat{U} = (1 - \alpha)\bar{U} + \alpha U = (1 - \alpha)\bar{U} + \alpha \sum_{j=0,p} U_j \varphi_j$$

Далее необходимо повторить такую же процедуру отдельно для плотности.

Этот лимитер не лишен недостатков, т.к. его применение не гарантирует подавление нефизических осцилляций. Но его основное преимущество заключается в простоте реализации на сетках с ячейками произвольной формы.

#### 4. Сопоставление результатов с мировым уровнем

Разработка и применение численных методов для решения эволюционных уравнений в частных производных составляют одно из основных направлений современной вычислительной математики. Мировым уровнем исследований по этой теме являются методы высокого порядка точности, поскольку они позволяют добиться заданной точности решения за меньшее расчетное время. Кроме того, некоторые методы высокого порядка могут иметь очень низкие численные диссипацию и дисперсию, которые важны для ряда приложений (например, турбулентных течений вязкой жидкости), но недостижимы для стандартных методов, широко используемых в промышленности.

Класс бикompактных схем выделяет среди других высокоточных схем сочетание одного из лучших спектральных разрешений, максимальной компактности шаблона и следующей из нее простоты в постановке граничных условий, слабых ограничений на устойчивость счета, экономичности реализации. Следовательно, развитие этого класса схем в сторону расширения круга задач, к решению которых он может применяться, а следовательно, в сторону решения практических задач, отвечает мировому уровню исследований.

Проведенное сравнение предложенного нового лимитера на основе усреднения решений, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных, с WENO-лимитером, одним из лучших лимитеров для РМГ, показало, что применение предложенного сглаживающего оператора, не уступает действию WENO-лимитера, а в некоторых случаях превосходит по точности получаемого решения. Новый лимитер легко обобщается в трехмерном случае на сетки с произвольной формой ячеек.

## **5. Публикации по проекту**

### **Со ссылкой на проект:**

Брагин М.Д., Рогов Б.В. Бикомпактные схемы для многомерного уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2021. – Т. 61, № 4. (Q2, в печати.)

### **По тематике проекта, сделанные по Госзаданию:**

Брагин М.Д., Рогов Б.В. О точности бикомпактных схем в задаче о распаде вихря Тейлора-Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (Q2, направлена в редакцию 13.10.2020.)



## Список использованных источников

1. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, № 4. – С. 672-695.
2. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2016. – Т. 56, № 6. – С. 958-972.
3. Bragin M.D., Rogov B.V. Conservative limiting method for high-order bicomcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. – 2020. – V. 151 – P. 229-245.
4. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Высокоточные бикомпактные схемы для численного моделирования течений многокомпонентных газов с несколькими химическими реакциями // Матем. моделирование. – 2020. – Т. 32, № 6. – С. 21-36.
5. Rogov B.V. Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomcompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. – 2019. – V. 139 – P. 136-155.
6. Chikitkin A.V., Rogov B.V. Family of central bicomcompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. – 2019. – V. 142 – P. 151-170.
7. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. О сходимости компактных разностных схем // Матем. моделирование. – 2008. – Т. 20, № 1. – С. 99-116.
8. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 3. – С. 313–325.
9. Cockburn and C-W. Shu. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: Multidimensional systems // J. Comp. Phys., 1998, v.141, p.199-224.
10. Krasnov M M, Kuchugov P A, Ladonkina M E, Lutsky A E, Tishkin V F Numerical solution of the Navier-Stokes equations by discontinuous Galerkin method//Journal of Physics: Conference Series, V. 815, №1, 2017.
11. Босняков С.М., Михайлов С.В., Подаруев В.Ю., Трошин А.И. Нестационарный разрывный метод Галеркина высокого порядка точности для моделирования турбулентных течений // Матем. моделирование, 2018, т. 30, №5, с. 37-56.
12. Bassi F. and Rebay S. Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations// Int. J. Numer. Meth. Fluids, 40, (2002), 197-207.

13. Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Разрывный метод Галеркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования.// Математическое моделирование, 2017 г., т. 29, № 2, с. 3-22.
14. Краснов М.М., Ладонкина М.Е. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Применение шаблонного метапрограммирования языка C++ // Программирование, 2017, №3, с. 41-53.
15. Волков А.В. Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье-Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках//Ученые записки ЦАГИ № 6 , т. XL, 2009.
16. Yasue K., Furudate M., Ohnishi N. and K. Sawada Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm //Communications in Computational Physics,vol.7,no.3,pp.510–533,2010.
17. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998. V. 1697. P. 151-268.
18. Cockburn B., Shu C.W.: Runge\_Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems// J. Scienti\_Comput. 16., 173-261, 2001
19. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods// Journal of Computational Physics, 226:1 (2007), 276–296.
20. Krivodonova L., Xin J., Remacle J.-F., Chevogeon N. and Flaherty J. Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws// Appl. Numer. Math , Vol. 48, No. 3, pp. 323-338, 2004.
21. Qiu J. and Shu C.-W.: Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters// SIAM J. Sci. Comput., 26(3), 907929. 2006.
22. Shu C.-W.: High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments// Journal of Computational Physics. V. 316, P 598- 613,2016.
23. Luo H., Baum J.D., Lohner R. A Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids// Journal of Computational Physics, Volume 225 Issue 1, Pages 686-713, 2007.
24. Zhu. J., Zhong X., Shu C.-W., Qiu J.: Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes// Journal of Computational Physics. V.248, Pages 200-220, 2013.

25. Ладонкина М. Е. , Неклюдова О. А. , Тишкин В. Ф. Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения//Матем. моделирование, 2018, том 30,номер 5, страницы 99–116.
26. Dumbser M., Balsara D.S., Toro E.F., Munz C.-D., A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes// Journal of Computational Physics, 227:82098253, 2008.
27. Michael Dumbser, Arbitrary high order *PNPM* schemes on unstructured meshes for the compressible Navier–Stokes equations// Computers & Fluids Volume 39, Issue 1, January 2010, Pages 60–76.
28. Persson P.O., Peraire J. Newton-GMRES preconditioning for discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations// SIAM J. Sci. Comput. 30(6), 27092733, 2008.
29. Peraire J., Persson P.-O. Adaptive High-Order Methods in Computational Fluid Dynamics, Vol. 2 of Advances in CFD, chap. 5 - High-Order Discontinuous Galerkin Methods for CFD// World Scientific Publishing Co., (2011).
30. Волков А.В., Ляпунов С.В. Монотонизация метода конечного элемента в задачах газовой динамики// Ученые записки ЦАГИ, т. XL, № 4, 2009, 15-27.
31. Haga T., Sawada K. An improved slope limiter for high-order spectral volume methods solving the 3D compressible Euler equations, 2009.