

О НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОФЕССОРА М.Л.ЛИДОВА И О РАЗВИТИИ ЕГО РАБОТ ПО ЭВОЛЮЦИИ СПУТНИКОВЫХ ОРБИТ (к 80-летию со дня рождения)

М.А.Вашковьяк

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
125047, Москва, Миусская пл., 4
тел. (495) 2507826, E-mail: vashkov@Keldysh.ru

В настоящем докладе представлены различные направления исследований, выполненных Лауреатом Ленинской премии, профессором Михаилом Львовичем Лидовым (1926–1993). Каждый из этапов его научного творчества мог бы стать темой отдельного доклада. Здесь же будут более подробно описаны работы по эволюции спутниковых орбит, которые в последние годы получили как теоретическое, так и прикладное развитие.

I.

Михаил Львович Лидов родился 4 октября 1926 г., и его юность пришлась на военные годы. В 1944 г. он ушел добровольцем на фронт, служил в действующей армии мастером по авиационному вооружению и воевал до дня Победы. Домой М.Л.Лидов вернулся только в 1951 году, заслужив боевые награды. К этому времени он уже заочно учился на механико-математическом факультете Московского государственного университета, а в 1954 г. с блеском окончил его дневное отделение, получив диплом с отличием по специальности «механика».

Научная деятельность М.Л.Лидова началась в 1954 году под руководством академика Леонида Ивановича Седова. После окончания университета М.Л.Лидов поступил на работу в Междудеятельственную комиссию по координации и контролю научно-технических работ в области организации и осуществления межпланетных сообщений при АН СССР. Практически сразу же он выполнил исследование специального класса решений уравнений газодинамики, что позволило получить полную картину температурного режима искусственного спутника Земли. Основы этого исследования были заложены, по-видимому, еще в студенческие годы, поскольку список научных трудов М.Л.Лидова начинается статьей, опубликованной в Докладах Академии наук в год окончания Университета.

В 1957 году М.Л.Лидов начал работать в Отделении прикладной математики Математического института им. В.А.Стеклова (так в то время назывался наш институт) в отделе, возглавляемом совсем недавно скончавшимся академиком Дмитрием Евгеньевичем Охоцимским. Именно Дмитрий Евгеньевич инициировал многие работы М.Л.Лидова и, в особенности, - работы по отечественной лунной программе.

Уже в 1958 году пионерские исследования М.Л.Лидова по определению плотности верхней атмосферы Земли из наблюдений за движением ее первых искусственных спутников и обнаруженный эффект вариации параметров атмосферы принесли ему заслуженное признание как ученых-теоретиков, так и специалистов-прикладников.

В последующие годы М.Л.Лидов стал одним из лидеров направления, связанного с теоретическими и прикладными задачами баллистического проектирования и управления полетом космических аппаратов. В 1960 году за большой цикл работ ему была присуждена Ленинская премия, а в 1965 году по совокупности выполненных исследований – ученая степень доктора физико-математических наук, причем без защиты кандидатской диссертации, что и тогда являлось большой редкостью. Работы М.Л.Лидова в соавторстве с Д.Е.Охоцимским и Н.М.Тесленко, посвященные анализу класса траекторий полета к Луне, а также разработанные им схемы управления были непосредственно использованы при решении многих «лунных» задач. Это облет Луны с фотографированием ее обратной стороны, мягкая посадка на поверхность Луны, запуск первых искусственных спутников Луны и доставка на Землю образцов лунного грунта. То были годы вдохновенного труда, и Михаил Львович с присущей ему самоотверженностью отдавал все свои силы и знания для успешного выполнения поставленных задач. Он сам и руководимые им сотрудники работали сутками без сна и неделями без отдыха, не считаясь с усталостью, а порой и с нездоровьем. В 1970 году за выполнение работ по лунной программе М.Л.Лидов был награжден орденом Трудового Красного Знамени. А в 1985 году в год сорокалетия Победы он получил Орден Отечественной войны второй степени. Это было признание боевых заслуг М.Л.Лидова как участника Великой Отечественной войны.

М.Л.Лидову и его ученикам принадлежит большой цикл работ по созданию численно-аналитических методов расчета движения искусственных небесных тел. Эти методы широко использовались при проектировании орбит спутников “Электрон”, “Прогноз”, спутников связи на геостационарных и высокоапогейных орбитах. Математические модели, применяемые в этих высокоточных и быстродействующих методах, учитывали весьма полную совокупность лунно-солнечных возмущений, возмущений от нецентральной геопотенциала (а для ИСЛ и масконов), влияние земной атмосферы, светового давления и эффекта экранирования спутника Землей. Алгоритмы и программы расчета движения геостационарных спутников были внедрены на многих предприятиях страны, в том числе, в научно-прикладных институтах Красноярска и Томска.

В 1964 году М.Л.Лидовым предложена постановка задачи о выборе состава измеряемых параметров траектории в случае неполного знания вероятностных характеристик ошибок измерений. Им была выявлена математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траекторий и задачами выбора состава измерений. Это направление нашло свое развитие в работах Б.Ц.Бахшияна, А.И.Матасова, Л.Ю.Белоусова и других.

Обширный цикл работ М.Л.Лидова и его сотрудников посвящен анализу орбит в окрестности коллинеарных точек либрации систем Земля – Луна и Солнце – Земля и разработке методов стабилизации движения по таким орбитам с приложениями к перспективному проекту “Реликт-2”. В эти работы весомый вклад внес А.П.Маркеев – ныне профессор, известный ученый в области механики.

Другой большой цикл работ М.Л.Лидова посвящен выявлению и практическому построению специальных классов траекторий ограниченной задачи трех тел, исследованию их устойчивости. На основе этих работ им предложен

вариант устойчивой пространственной периодической орбиты для космического радиоинтерферометра. Она принадлежит семейству периодических орбит, обнаруженному М.Л.Лидовым в ограниченной круговой задаче трех тел продолжением сильноэллиптической спутниковой орбиты в окрестности тела меньшей массы. Окончанием этого семейства служит одна из плоских резонансных орбит в окрестности неустойчивой коллинеарной точки либрации. Практически одновременно американский ученый Брэйкуэлл, не зная о работах М.Л.Лидова, нашел данное семейство, пройдя по тому же пути, но в обратном направлении. Одна из последних работ М.Л.Лидова посвящена возможному использованию так называемых квазиспутниковых орбит в проекте “Фобос” и для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной.

Помимо повседневной научно-производственной деятельности, М.Л.Лидов вел большую педагогическую работу в качестве профессора кафедры теоретической механики МГУ, а позднее – на факультете повышения квалификации МИЭРА. В МГУ он вел семинар по механике космического полета, читал спецкурс по эволюции орбит и курс лекций по теоретической механике. Эти лекции усилиями коллег М.Л.Лидова изданы в 2001 году отдельной книгой в московском издательстве “Физматлит”.

М.Л.Лидов был членом Национального комитета по теоретической и прикладной механике. Его выступления на самых представительных конференциях всегда были в центре внимания специалистов.

Много сил и времени М.Л.Лидов отдавал неформальной редакторской работе в академических научных журналах “Космические исследования” и “Письма в Астрономический журнал”. Он был научным редактором раздела “Динамика полета” энциклопедии “Космонавтика”. В сентябре 1993 года еще при жизни М.Л.Лидова Международный Астрономический Союз присвоил его имя малой планете, зарегистрированной в международном каталоге под номером 4236. М.Л.Лидову посвящена памятная страница на интернет-сайте нашего Института www.keldysh.ru/memory/lidov/.

В 2000 году в журнале «Вестник Российской Академии наук», т. 70, № 6 в рубрике «Этюды об ученых» были опубликованы воспоминания о М.Л.Лидове его университетского сокурсника и коллеги член-корреспондента РАН Владимира Васильевича Белецкого. В прошлом году вышла его автобиографическая книга «Шесть дюжин», в которой В.В.Белецкий также делится своими воспоминаниями о М.Л.Лидове. В 2001 году в журнале «Космические исследования», т. 39, № 5 опубликованы воспоминания профессора Всеволода Александровича Егорова, многие годы проработавшего с М.Л.Лидовым в одной комнате. К несчастью, эта его публикация оказалась последней – В.А.Егоров погиб в том же 2001 году при трагических обстоятельствах.

М.Л.Лидов воспитал многих кандидатов и докторов наук. Под его руководством в разные годы учились и работали известные сотрудники ИПМ и других учреждений. А.А.Соловьев – ныне возглавляет Международный Институт теории предсказания землетрясений, А.И.Нейштадт – стал крупным ученым в области динамических систем, нелинейной и хаотической механики, его труды широко известны в нашей стране и за рубежом. К косвенным ученикам М.Л.Лидова

можно с полным основанием отнести слушателей его лекций и, в особенности, многочисленных специалистов, изучавших и использовавших в работе его научные публикации. В 1992 году в Москву приезжала делегация американских ученых-баллистиков. На семинаре в Институте космических исследований в числе других выступил Ч.Апхофф, доклад которого назывался “Мой долг Лидову”. В докладе, посвященном использованию результатов М.Л.Лидова, были перечислены пять космических проектов США, в разработке которых «анализ, выполненный Лидовым, сыграл большую роль». Далее были указаны еще 12 конкретных приложений этого анализа. В заключительном разделе доклада, озаглавленном «Чему я научился у Лидова», Апхофф, в частности, отметил, что «новый подход к старым проблемам может привести к важным новым результатам».

Круг научных интересов М.Л.Лидова, постоянно расширяясь, охватывал многие разделы математики и механики, астрономии и космогонии, теории управления и дифференциальных игр. Если мысленно экстраполировать возможную научную деятельность Михаила Львовича за ту роковую дату 30 декабря 1993 года, то ясно ощущается вся трагичность его безвременной кончины в расцвете творческих сил, планов и устремлений.

II.

В этой части доклада более подробно изложены работы М.Л.Лидова, связанные с исследованием эволюции спутниковых орбит.

В 1961 году им фактически было положено начало новому направлению небесной механики – исследованию эволюции орбит искусственных и естественных небесных тел. Созданные М.Л.Лидовым методы позволяли с высокой точностью вычислять параметры орбит ИСЗ, изменяющихся под действием гравитационных возмущений. Его основополагающая статья 1961 года была практически сразу же воспроизведена по-английски в двух иностранных журналах по космической тематике - Planetary Space Sciences и AIAA Journal. Кроме того, в данной работе М.Л.Лидов получил качественно новые результаты по эволюции спутниковых орбит различных классов на основе упрощенной интегрируемой задачи.

Упрощенная задача - это так называемая двукратно осредненная задача Хилла, описывающая в первом приближении эволюцию спутниковой орбиты под действием вековых возмущений от достаточно удаленной притягивающей точки. Осреднение в этой задаче проводится независимым образом по всем наиболее быстрым переменным – средним аномалиям спутника и внешней точки. Если два первых интеграла этой задачи $a = c_0$ и $(1 - e^2) \cos^2 i = c_1$, были известны ранее из работ профессора Николая Дмитриевича Моисеева, то полученный М.Л.Лидовым в явном виде дополнительный интеграл

$$e^2 (2/5 - \sin^2 i \sin^2 \omega) = c_2,$$

позволил свести проблему к исследованию поведения фазовых траекторий в плоскости (ω, e) в зависимости от c_2 при фиксированном значении c_1 и к вычислению квадратуры для изменения $\Omega(t)$ (в приведенных формулах использованы стандартные обозначения для кеплеровских элементов орбиты

спутника). Выполненный М.Л.Лидовым качественный анализ семейств фазовых траекторий привел к интереснейшим небесно-механическим результатам.

Во-первых, это существование в осредненной задаче орбит с неизменными эксцентриситетом и аргументом перицентра при $c_1 < 3/5$ или особой точки типа центр в плоскости (ω, e) ($\omega = \pm \pi/2, e^2 = 1 - (5c_1/3)^{1/2}$). Эта особая точка и либрационное изменение аргумента перицентра в ее окрестности в зарубежной литературе называется “резонансом Козаи” по имени японского ученого, исследовавшего несколько более общий (астероидный) случай задачи, но годом позже. К сожалению, качественное исследование, выполненное М.Л.Лидовым в 1961 году, получило известность за рубежом только после 1963 года, когда он представил свой доклад на Международный симпозиум в Париже. Поскольку в «астероидном» случае качественные особенности, выявленные М.Л.Лидовым, сохраняются, было бы справедливым, как предложил профессор А.И.Нейштадт, использовать название “резонанс Лидова-Козаи”.

Во-вторых, в частном случае $c_1 = 0$, когда орбита спутника ортогональна плоскости орбиты возмущающей точки, эволюция в конечном счете приводит к ее превращению в прямолинейный отрезок ($e \rightarrow 1$). Для малых значений c_1 эволюция орбиты при любых начальных значениях ω и e приводит к такому увеличению эксцентриситета, что в силу постоянства a расстояние перицентра $q = a(1 - e)$ становится равным радиусу планеты a_0 , и спутник падает на ее поверхность. Это теорема М.Л.Лидова. Яркой иллюстрацией служит проведенный им расчет эволюции лунной орбиты, гипотетически повернутой перпендикулярно плоскости эклиптики. Оказалось, что такая “ортогональная Луна” свалилась бы на Землю всего через четыре с половиной года!!! Как эмоционально пишет в своих воспоминаниях В.В.Белецкий, «Мне до сих пор хочется и смеяться, и плакать от восторга, когда я вспоминаю этот результат». По его словам, даже академик Владимир Игоревич Арнольд вначале воспринял результат М.Л.Лидова с сомнением, но потом, безусловно, признал.

Установив данное свойство почти ортогональных спутниковых орбит, Михаил Львович (по его собственному рассказу) тотчас же обратился к астрономическим справочникам. И сразу обнаружил противоречащий пример в виде спокойно существующих спутников Урана, почти круговые и почти экваториальные орбиты которых наклонены к плоскости эклиптики (или ураноцентрической орбите возмущающего тела – Солнца) примерно на 98° . Анализ реальной физической модели, учитывающей сжатие Урана (наряду с менее значительными солнечными возмущениями), с одной стороны разрешил противоречие, допустив существование почти круговых ортогональных орбит, а с другой – привел к постановке новой небесно-механической проблемы - двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты. Для ее анализа существенными являются два параметра: γ характеризующий отношение возмущающих ускорений от сжатия планеты и возмущений от внешней точки, и ε - угол наклона экваториальной плоскости планеты к плоскости орбиты возмущающей точки. В общем случае рассматриваемая задача уже не допускает трех первых интегралов в инволюции. При произвольном ε нарушается осевая симметрия задачи и, как следствие,

“пропадает” интеграл c_1 . Интеграл c_2 усложняется и представляет собой двукратно осредненную возмущающую функцию задачи, зависящую от всех элементов спутниковой орбиты. И лишь интеграл c_0 по-прежнему свидетельствует о неизменности ее большой полуоси. Тем не менее, задача имеет ряд интегрируемых случаев и частных решений, выявленных в работе М.Л.Лидова и М.С.Ярской 1974 г. Наиболее содержателен из них компланарный случай, когда указанные плоскости совпадают. Поскольку при $\varepsilon = 0$ восстанавливается осевая симметрия и интеграл c_1 , то в этом случае оказалось возможным выполнить полное качественное исследование задачи, выявившее богатое разнообразие структур интегральных кривых.

В 1974–1977 гг. М.Л.Лидовым совместно с С.Л.Зиглиным было выполнено исследование двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел для равномерно близких орбит возмущающего и возмущаемого тел (этот случай традиционно труден для теории возмущений), а также двукратно осредненной общей задачи трех тел конечных масс. В последнем случае выявлено существование критического эксцентриситета орбит двух близких тел, при котором теряется устойчивость изначально плоского движения трех тел.

Несколько необычной для тематики М.Л.Лидова явилась его совместная с А.И.Нейштадтом работа, связанная с вращательным движением небесных тел. Метод канонических преобразований, примененный для анализа резонансных закономерностей вращения, позволил интерпретировать лунные законы Кассини как свойства асимптотически устойчивого стационарного решения эволюционных уравнений с учетом приливной диссипации энергии. Эта работа дополнила и уточнила выполненное В.В.Белецким двумя годами ранее (с помощью метода осреднения) исследование проблемы Кассини без учета диссипации.

Далее кратко описаны исследования, выполненные в последние 10–12 лет и связанные с развитием работ М.Л.Лидова.

В исследованиях неинтегрируемой двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты, выполненных нами в 1996–1998 гг., было установлено свойство инвариантности эволюционной системы относительно преобразования

$$\bar{t} = -t, \bar{e} = e, \bar{i} = i, \bar{\omega} = -\omega, \bar{\Omega} = -\Omega,$$

выявлены и построены (в основном, численным способом) семейства ее периодических решений. Эти решения соответствуют так называемым периодически эволюционирующим спутниковым орбитам, для которых изменение всех четырех элементов e, i, ω, Ω происходит с одним и тем же периодом. Более подробное представление о семействах этих орбит и об их устойчивости можно получить из наших публикаций, в том числе и совместных с Н.М.Тесленко, в «Письмах в Астрономический журнал».

В заключительной части представлено естественно-научное развитие работ М.Л.Лидова, касающееся эволюции орбит новых далеких спутников планет-гигантов. Начиная с конца 1997 г. и по настоящее время, с помощью наземных

наблюдений зарубежными учеными были открыты десятки далеких спутников Юпитера и Сатурна, девять спутников Урана и пять спутников Нептуна. Они представляют собой тела относительно малых размеров порядка 2 – 120 км, движущиеся в тех областях околопланетного пространства, где влияние солнечных возмущений на их орбиты на несколько порядков превосходит влияние сжатия центральной планеты ($\gamma \ll 1$). Новые спутники относятся к классу так называемых внешних спутников, движущихся по нерегулярным орбитам с большими эксцентриситетами и наклонениями, а для анализа их эволюции в первом приближении можно, полагая $\gamma = 0$, использовать двукратно осредненную задачу Хилла.

Качественное исследование этой задачи, выполненное М.Л.Лидовым, было дополнено построением ее общего решения, зависящего от четырех произвольных постоянных – начальных элементов спутниковой орбиты $e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0$, отнесенных к плоскости орбиты возмущающего тела. Для вычисления зависимости от времени долготы восходящего узла Ω получено явное аналитическое выражение в виде полных и неполных эллиптических интегралов 1-го и 3-го родов.

Исходными данными для исследования долгопериодической эволюции новых далеких спутниковых орбит послужили эклиптические планетоцентрические элементы, приведенные в Циркулярах Международного Астрономического Союза и доступные пользователям интернета. Системы элементов этих орбит в настоящее время уточняются и, по-видимому, будут уточняться в дальнейшем.

В цикле наших работ 1999 - 2005 гг., опубликованных в «Письмах в Астрономический журнал», на основе построенного общего решения двукратно осредненной задачи Хилла, а также созданного численно-аналитического метода выявлены качественные особенности эволюции новых спутниковых орбит, предложена их простейшая классификация и определены приближенные количественные характеристики эволюции. К ним относятся экстремальные значения эксцентриситетов и наклонений, периоды циркуляции аргументов перицентров и долгот восходящих узлов. В рамках используемой модели двукратно осредненной задачи Хилла для ряда новых спутников Юпитера, Сатурна и Нептуна обнаружен либрационный характер изменения аргументов перицентров спутниковых орбит. Отмеченное свойство весьма редко встречается даже у многотысячного ансамбля астероидных орбит, поэтому тот факт, что среди десятков орбит недавно открытых далеких спутников планет-гигантов оказалось около десяти либрационных, достаточно удивителен. Следует заметить, однако, что фазовые траектории некоторых спутников в плоскости (ω, e) расположены хотя и внутри либрационных зон, но очень близко к сепаратрисам ($c_2 = 0$). Поэтому в действительности изменение аргументов перицентров их орбит могло оказаться циркуляционным при незначительном уточнении как элементов спутниковых орбит, так и модели эволюции. Произошедший подобный «переход» двух орбит спутников Сатурна выявил ограниченность применения двукратно осредненной модели при значениях c_2 , близких к нулю.

Немного отвлекаясь от новых естественных спутников планет, отметим и недавно выполненное В.И.Прохоренко (ИКИ РАН) геометрическое исследование

двукратно осредненной задачи Хилла для наглядного представления интегральных многообразий и их сечений. Основное приложение этого исследования связано с анализом возможности падения высокоапогейных ИСЗ на поверхность Земли и с оценкой их “времени жизни”.

Другим необычным феноменом в спутниковых системах планет-гигантов является распределение спутников по большим полуосям их орбит. Если в системе Юпитера внешние спутники явно разделяются на две группы прямых и обратных, то в системах остальных планет-гигантов имеются диапазоны больших полуосей, в которых существуют и прямые, и обратные орбиты. Кроме того, во всех системах существуют диапазоны больших полуосей, свободные от спутниковых орбит. В системе Урана подобная “пустота”, разделяющая внутренние и внешние спутники, простирается примерно от 600 тыс. км. до 4 млн. км., где возмущающее влияние Солнца и сжатия центральной планеты сравнимо по величине. Качественный анализ одного из выявленных М.Л.Лидовым интегрируемых случаев двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия планеты ($\varepsilon = 90^\circ$, $i = 90^\circ$) позволяет предложить в качестве гипотезы небесно-механическое объяснение отсутствия экваториальных спутников Урана в области $a > 1.3$ млн. км. Если бы в указанной области существовали спутники, то с течением времени в результате эволюции их орбиты начали бы пересекаться с орбитами внутренних спутников. При этом существенно повышается вероятность тесных сближений и соударений с внутренними спутниками, так что они должны были либо уйти на более далекие орбиты, либо упасть на внутренние спутники, существенно пополнив их массы. Косвенным подтверждением этому служит заметная массивность внутренних спутников Урана по сравнению с внешними. Конечно гипотетические экваториальные спутники могли упасть и на поверхность самого Урана, однако такая возможность реализуется лишь для $a > 3$ млн. км. Естественная в эволюционной задаче аппроксимация орбит внутренних спутников материальными гауссовыми кольцами позволяет уменьшить это граничное значение до 1.3 млн.км. Расчеты эволюции орбит гипотетических спутников, проведенные в более полной физической модели, учитывающей отличие реального значения ε от 90° и медленное изменение элементов орбиты самого Урана, подтверждают высказанную гипотезу

В заключение хочется подчеркнуть, что выполненные исследования эволюции орбит далеких спутников планет-гигантов имеют под собой мощный фундамент, заложенный М.Л.Лидовым еще сорок пять лет назад. Сегодня в этот памятный день мне хотелось бы еще раз отметить неоценимый вклад, внесенный Михаилом Львовичем Лидовым как в прикладные работы по баллистическому проектированию и осуществлению космических полетов, так и в теоретические исследования фундаментальных небесно-механических проблем. Хочется надеяться, что замечательные методы и результаты, полученные этим выдающимся ученым, найдут свое дальнейшее продолжение и развитие.

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ
М.Л.ЛИДОВА

1. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения. // ДАН СССР. 1954. Т. 47. №3. С. 409.
2. Конечный интеграл уравнений одномерных автомодельных адиабатических движений газа. // ДАН СССР 1955. Т.103. № 1. С. 35.
3. К теории линеаризованных решений около одномерных автомодельных движений газа. // ДАН СССР 1955. Т. 102. № 6. С. 106.
4. К теории неустановившихся движений газа с учетом сил тяготения. // ПММ АН СССР 1955 Т. 19. № 5. С. 541.
5. Автомодельное движение газа со сферической симметрией в поле гравитирующего центра. // Астрономич. журн. 1957. Т. 34. № 4. С. 603.
6. Сопротивление неориентированного тела при движении в разреженном газе. // Изв. АН СССР сер. Геофизическая.
7. О температурном режиме искусственного спутника Земли. // Изв. АН СССР сер. геофизическая. 1957. № 4. С. 527(совместно с Карпенко А.Г.)
8. Определение плотности атмосферы по наблюдаемому торможению первых искусственных спутников Земли//Искусств. спутники Земли. 1958. № 1. С. 9.
9. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5. Английские переводы: 1.The Evolution of Orbits of Artificial Satellites of Planets under the Action of Gravitational Perturbations of External Bodies. // Planet. Space Sci. 1962. Vol. 9. P. 719-759, 2.Evolution of the Orbits of Artificial Satellites of Planets as Affected by Gravitational Perturbations from External Bodies. // AIAA Journal. 1963. Vol. 1. № 8. P. 1985-2002.
10. On the approximated analysis of the orbit evolution of artificial satellites. // Dynamics of satellites. Berlin. Springer Verlag. 1963. P. 168.
11. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. // Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд. АН СССР, 1963.
12. Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел. // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 6. С. 843 (совместно с Охоцимским Д. Е. и Тесленко Н.М.).
13. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов/ // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 5. С. 713.
14. Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления. // Космич. исслед. 1969. Т. 7. № 4. С. 467.
15. Математическая аналогия между некоторыми задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений. // Космич. исслед. 1971. Т. 9. № 5. С. 687.
16. Об эволюции орбиты стационарного ИСЗ. // Космич. исслед. 1973. Т 11. № 3. С. 347 (совместно с Вашковьяком М.А.).
17. Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбит спутников при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты. // Космич. исслед. 1974. Т 12. № 2. С. 155 (совместно с Ярской М.В.).

18. Влияние масконов на прогнозирование движения ИСЛ. // Космич. исслед. 1974. Т. 12. № 4. С. 491 (совместно с Гордеевой Ю.Ф.).
19. The analysis of restricted circular twice – averaged three body problem in the case of close orbit.// Celestial mechanics. 1974. № 9. P. 151 (together with Ziglin S.L.)
20. Полуаналитический метод расчета движения искусственного спутника Луны. // Космич. исслед. 1975. Т. 13. № 3. С. 283 (совместно с Ляховой В.А. и Соловьевым А.А.).
21. Метод канонических преобразований в задачах о вращении небесных тел и законы Кассини. // Определение движения космических аппаратов. М.: Наука, 1975. С. 74 (совместно с Нейштадтом А. И.).
22. Полуаналитический метод расчета движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации. // Космич. исслед. 1976. Т. 14. № 6. С. 909 (совместно с Вашковьяком М.А. и Маркеевым А.П.).
23. Non-restricted double-averaged three body problem in Hill's case. // Celestial mechanics. 1976. № 13. P. 471 (together with Ziglin S.L.).
24. Случай Хилла осредненной задачи трех тел и устойчивость плоских орбит. // ПММ. 1977. Т. 41. № 2. С 234 (совместно с Зиглиным С.Л.).
25. Об одном семействе пространственных периодических орбит около Луны и планет. // ДАН СССР. 1977. Т. 223. № 6. С. 1068.
26. Метод учета влияния сил светового давления при полуаналитическом расчете движения спутников. // Математическое обеспечение космич. экспериментов. М.: Наука, 1978. С. 149 (совместно с Ивановой Е.Я.).
27. Полуаналитические методы расчета движения спутников//Труды Ин-та теор. астрон. 1978. № 17. С. 54.
28. Численные исследования некоторых классов траекторий ограниченной задачи трех тел. // Труды объединенных научных чтений по космонавтике. М., 1979. С. 142 (совместно с Вашковьяком М. А.).
29. Исследование семейств пространственных периодических орбит задачи трех тел. // Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 3. С. 323 (совместно с Рабиновичем В.Ю.).
30. Увеличение размерности гамильтоновых систем, KS -преобразование, использование частных интегралов. // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 2. С. 163.
31. Метод построения пространственных периодических орбит в задаче Хилла. // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 6. С. 787.
32. Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость. // Космич. исслед. 1983. Т. 21. № 1. С. 3 (совместно с Ляховой В.А.).
33. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. // Космич. исслед. Т. 22. № 4. С. 483.
34. Построение семейств пространственных периодических орбит задачи трех тел с помощью KS - преобразований. // Труды 10-ой Международной конференции по нелинейным колебаниям. Варна, 1984. С. 344.
35. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля-Солнце и смежные задачи. // Космич. исслед. 1987. Т 25. № 2. С. 163 (совместно с Ляховой В.А. и Тесленко Н.М.).

36. Об одном варианте орбиты для околоземного радиоинтерферометра. // Письма в АЖ. 1988. Т. 14. № 9. С. 851 (совместно с Ляховой В.А.).
37. Траектории полета Земля- Луна- гало-орбита в окрестности точки L_2 системы Земля-Солнце. // Космич. исслед. 1992. Т. 30. № 4. С. 435 (совместно с Ляховой В.А. и Тесленко Н.М.)
38. Теория возмущений и анализ эволюции квази-спутниковых орбит в ограниченной задаче трех тел. // Космич. исслед. 1993. Т. 31. № 2. С. 75 (совместно с Вашковьяком М.А.).
39. О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной. // Письма в АЖ. 1994. Т. 20. № 3. С. 1 (совместно с Вашковьяком М.А.).
40. Аналитический метод расчета движения по гало-орбите и проблема экранирования КА от солнечной радиации в проекте «Реликт-2». // Космич. исслед. 1994. Т. 32. № 1. С. 3 (совместно с Вашковьяком М.А. и Ляховой В.А.).
41. О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел. // Письма в АЖ. 1994. Т. 20. № 10. С. 1 (совместно с Вашковьяком М.А.).
42. Курс лекций по теоретической механике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.-478 с. (Издание при поддержке РФФИ, проект 00-01-14056д).