

# *О движении правильного тетраэдра с ротором в центральной поле сил*

А.А. БУРОВ

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН

А.Д.ГЕРМАН

University of Beira Interior, Portugal

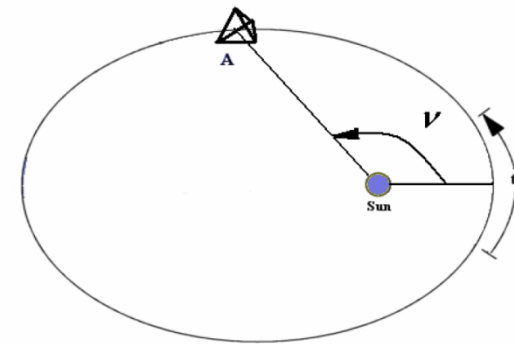
Р.С.СУЛИКАШВИЛИ

ანდრია რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი

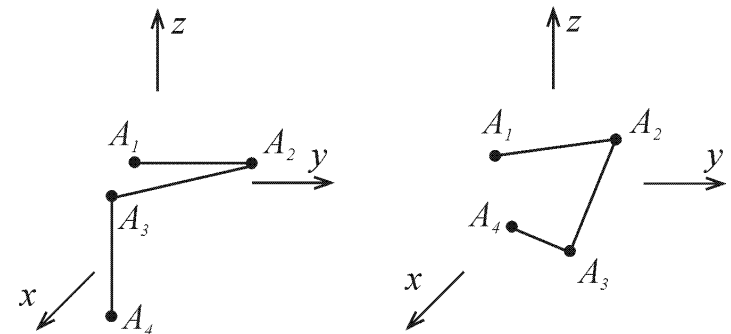
Andrea Razmadze Mathematical Institute, Georgia

# Мотивировка

- Имеются различные проекты, в т.ч. - НАСА, предполагающие размещение на орбите пространственных группировок спутников.
- Поддержание неизменности конфигурации группировки средствами активного контроля выглядит чрезвычайно дорогим.
- Известно достаточно большое множество плоских и пространственных конфигураций, включающих в себя тросовые элементы.
- Вопрос: как можно использовать роторы для управления ориентацией таких систем
- Частный случай: четвёрка равных спутников в вершинах правильного тетраэдра.



Orbiting tetrahedron



A. Guerman, Acta Astronautica, 58(1), 2006, pp. 1-14.

# Особенности орбитальной динамики правильных тетраэдров и иных правильных многогранников

---

- Движение вокруг центра масс орбитальных объектов, допускающих симметрию правильных многогранников, требует принятия во внимание членов порядка 3 и выше в разложении гравитационного потенциала (“пост-спутниковое приближение”);
- Для тетраэдра принимают во внимание слагаемые третьего порядка малости, для куба и октаэдра - четвертого, для икосаэдра и додекаэдра - пятого.
- Гравитационный потенциал - функция симметрических многочленов, инвариантных под действием соответствующей группы симметрии.
- Эти полиномы позволяют найти все относительные равновесия спутника и исследовать их устойчивость.

## Задача настоящего исследования:

---

- Оценить возможности использования роторов для реализации требуемой ориентации тетраэдральной орбитальной группировки.

Главное предположение:

- Центр масс всей тетраэдральной группировки движется по круговой Кеплеровской орбите

## Основные обозначения

---

- $\{A, B, C, S\} = \mathcal{J}$  - содержащие равные массы вершины правильного тетраэдра;
- $O$  – их центр масс;
- $l$  - длина ребра тетраэдра;
- $(\xi, \eta, \zeta)^T$  – координаты точки  $\mathcal{J}$  в орбитальной системе координат;
- $R$ – радиус орбиты центра масс;
- $\omega$  - орбитальная угловая скорость центра масс.

# Потенциал центробежных сил и Ньютоновский потенциал точки $\mathcal{J}$

$$U_n = -mG/r, \quad r = (\xi^2 + \eta^2 + (R + \zeta)^2)^{1/2}, \quad U_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 [\xi^2 + (R + \zeta)^2]$$

- Кеплеровская орбита  $\longrightarrow \omega^2 R^3 = G$ .
- Безразмерные единицы:  $R=1, \omega=1, m=1$ ;
- “Пост-спуниковое приближение” для потенциала (суммирование просиходит по всем вершинам тетраэдра):

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + \dots,$$

$$W_0 = -3N/2, \quad W_1 = 0,$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \sum (\eta^2 - 3\zeta^2),$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \sum (-3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2)\zeta$$

# Функция Рауса

---

- Связи, выражающие неизменность длин рёбер:

$$f_{pq} = (P - Q) \cdot (P - Q) - l^2 = 0, \quad p \neq q, \quad p, q \in I$$

$$S = -(A + B + C)$$

- Условие на центр масс:

- Функция Рауса:

$$W_\lambda = W_2 + W_3 + \frac{1}{2} (\lambda_{as} f_{as} + \lambda_{bs} f_{bs} + \lambda_{cs} f_{cs} + \lambda_{ab} f_{ab} + \lambda_{ac} f_{ac} + \lambda_{bc} f_{bc})$$

- Уравнения относительных равновесий

$$\frac{\partial W}{\partial p_\xi} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial p_\eta} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial p_\zeta} = 0, \quad p \in \{a, b, c\}$$

# Относительные равновесия

---

Имеются три класса равновесных ориентаций:

- Устойчивое равновесие, когда тетраэдр «смотрит» на Землю вершиной;
- Неустойчивое равновесие степени неустойчивости 1, когда тетраэдр «смотрит» на Землю линией, соединяющей средние точки пары скрещивающихся рёбер;
- Неустойчивое равновесие степени неустойчивости 2, когда тетраэдр «смотрит» на Землю серединой грани.

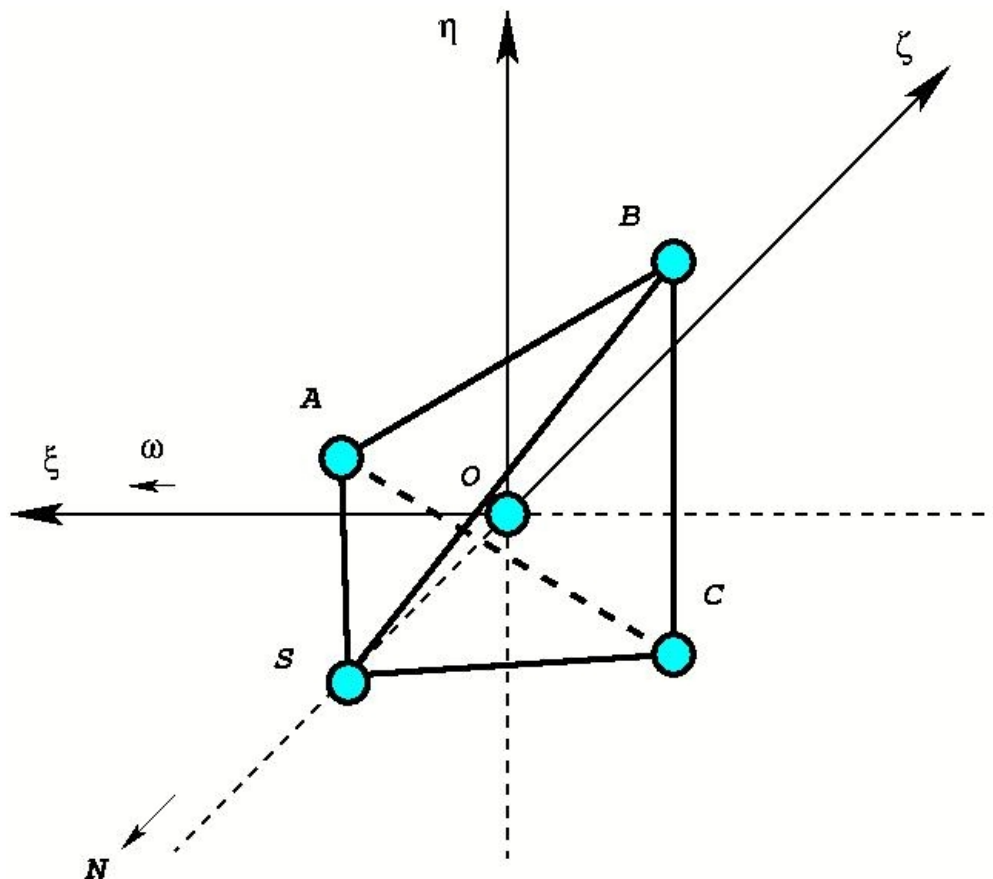
Каждый из классов представлен однопараметрическим семейством конфигураций, получающихся друг из друга поворотом вокруг локальной вертикали.

Иные классы равновесных конфигураций не существуют.



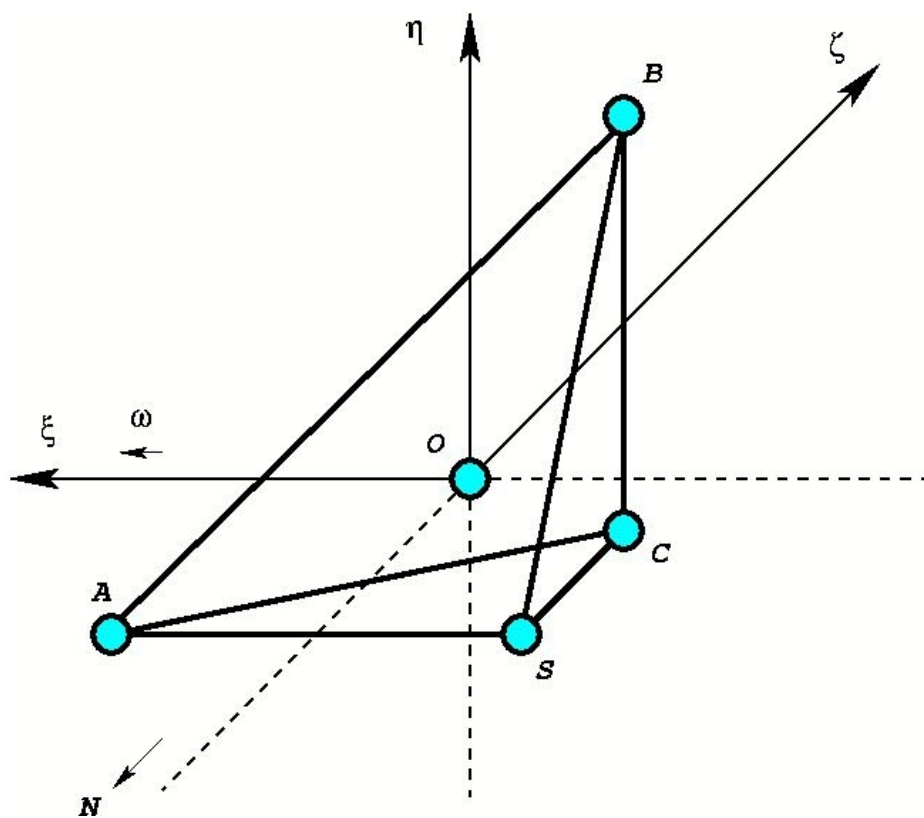
# Относительные равновесия класса I:

---



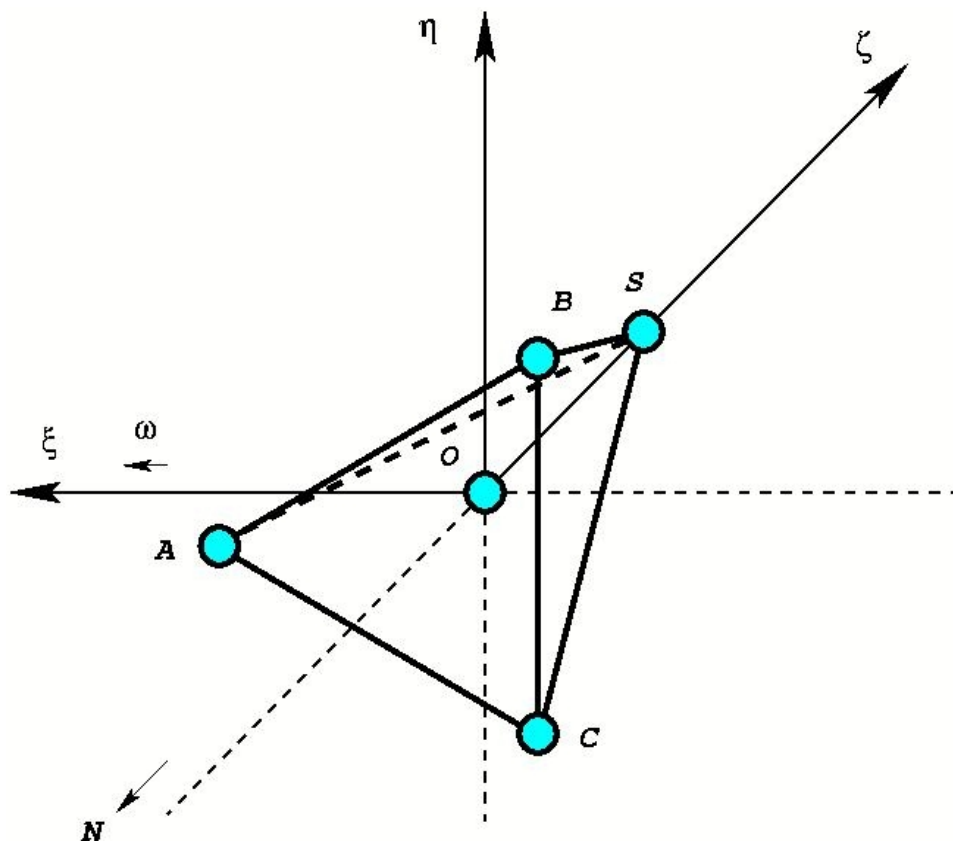
## Относительные равновесия класса II:

---



## Относительные равновесия класса III:

---



# Уравнения движения тетраэдра с роторами

---

$$m'\dot{\mathbf{v}} = m'\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}} - \varepsilon^3 \frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{r}} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) &= (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega} \\ &+ \mathbf{r} \times \left( \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial \mathbf{r}} + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial \mathbf{r}} \right) + \dots \right) = \\ &= (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial \mathbf{r}} + \dots \end{aligned}$$

# Изменённый потенциал и функция Рауса

---

$$U_{aug} = -\frac{1}{2}I\Omega_o^2 + (\mathbf{k}, \boldsymbol{\beta})\Omega_o + \varkappa\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \varkappa < 0$$

$$W = U_{aug} + \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + \mu(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}\nu(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$$

## Уравнения относительных равновесий

---

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = -\Omega_o k + \lambda \beta + \mu \gamma = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \alpha \gamma_2 \gamma_3 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 = 0, \quad (123)$$

$$(\beta, \beta) = 1, \quad (\beta, \gamma) = 0, \quad (\gamma, \gamma) = 1$$

# Стационарные конфигурации

$$I. \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( -2 \sin \varphi, -\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi, \sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi \right)^T$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^T \quad (\text{вершина «смотрит» на Землю})$$

$$II. \quad \beta = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T, \quad \gamma = (0, 0, 1)^T$$

(середина ребра «смотрит» на Землю)

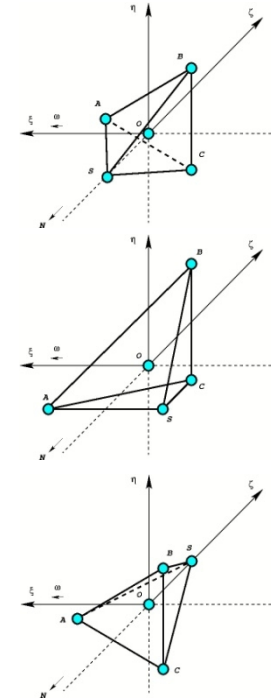
$$III. \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( -2 \sin \varphi, -\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi, \sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi \right)^T$$

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^T$$

(середина грани «смотрит» на Землю)

Главное условие - ось ротора перпендикулярна плоскости орбиты  $k\beta$ ,  $k \in R$

Множители:  $\lambda = \Omega_0(\mathbf{k}, \beta)$ ,  $\mu = \Omega_0(\mathbf{k}, \gamma) = -\varkappa \sum_{(123)} \beta_1 \gamma_2 \gamma_3$ ,  $\nu = -3\varkappa \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$



# Устойчивость

Вторая вариация функции Рауса и линейное многообразие

$$2\delta^2 W = \lambda(\delta\beta, \delta\beta) + 2\nu(\delta\beta, \delta\gamma) + \mu(\delta\gamma, \delta\gamma) + 2\alpha \sum_{(123)} \gamma_1 \delta\gamma_2 \delta\gamma_3$$

$$(\beta, \delta\beta) = 0, \quad (\beta, \delta\gamma) + (\gamma, \delta\beta) = 0, \quad (\gamma, \delta\gamma) = 0$$

Критерий Манна

$$P_3(\sigma) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \lambda - \sigma & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & \lambda - \sigma & 0 & 0 & \mu & 0 \\ \beta_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda - \sigma & 0 & 0 & \mu \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 & \mu & 0 & 0 & \nu - \sigma & \alpha\gamma_3 & \alpha\gamma_2 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \mu & 0 & \alpha\gamma_3 & \nu - \sigma & \alpha\gamma_1 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & \mu & \alpha\gamma_2 & \alpha\gamma_1 & \nu - \sigma \end{pmatrix}$$



## Устойчивость равновесий класса I

---

$$\sigma_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon, \quad \sigma_2 = \Omega_0 k, \quad \sigma_3 = \frac{\sqrt{3}\Omega_0 k - 2\varepsilon}{2\sqrt{3}}$$

$$\Omega_0 k > 0 \quad \chi = 0 \quad \text{Устойчивость}$$

$$2\varepsilon/\sqrt{3} < \underline{\Omega_0 k} < 0 \quad \chi = 1 \quad \text{Неустойчивость}$$

$$\Omega_0 \dot{k} < 2\varepsilon/\sqrt{3}. \quad \chi = 2$$

## Устойчивость равновесий класса II

---

$$\sigma_1 = \Omega_0 k$$

$$\sigma_2, \sigma_3$$

$$2\sigma^2 + (\alpha \sin(2\varphi) - \Omega_0 k)\sigma - \alpha(\alpha + \Omega_0 k \sin(2\varphi)) = 0$$

$$\chi = 0$$

Устойчивость

$$\Omega_0 k > 0$$

$$\alpha \sin(2\varphi) - \Omega_0 k < 0$$

$$\alpha + \Omega_0 k \sin(2\varphi) > 0$$

## Устойчивость равновесий класса III

---

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon, \quad \sigma_2 = \Omega_0 k, \quad \sigma_3 = \frac{\sqrt{3}\Omega_0 k + 2\varepsilon}{2\sqrt{3}}$$

$$-2\varepsilon/\sqrt{3} < \Omega_0 k \quad \chi = 1$$

$$0 < \Omega_0 k < -2\varepsilon/\sqrt{3} \quad \chi = 2$$

$$\Omega_0 k < 0 \quad \chi = 3$$

## Дальнейшие исследования

---

Последующие шаги таковы:

- Изучение возможности замены средств активного контроля легковесными элементами в случае эллиптической орбиты;
- Оценка влияния массы тросов на управление движением таких симметричных конфигураций;
- Исследование динамики тетраэдра с помощью аналога уравнений Белецкого для “пост-спутникового приближения” ньютоновского потенциала.

## Благодарности:

---

Исследования поддержаны

- Российским фондом фундаментальных исследований
- Portuguese Foundation for Science and Technology

## Благодарности:

---

Исследования поддержаны

- Российским фондом фундаментальных исследований
- Portuguese Foundation for Science and Technology

и пока ещё не поддержаны

- Georgian Science Foundation

# Литература

---

- Routh, E.J., A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, London, 1892.
- Beletsky, V.V., Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1966.
- Sulikashvili, R. S., The effect of higher-order moments of inertia of the dynamics of a rigid body with a fixed point, Problems on the investigation of stability and stabilization of motion, Akad. Nauk SSSR, Vychisl. Tsentr, Moscow, 1985, pp. 90--104.
- Sulikashvili, R. S., Stationary motions of a tetrahedron and an octahedron in a central gravitational field, Problems on the investigation of stability and stabilization of motion, Akad. Nauk SSSR, Vychisl. Tsentr, Moscow, 1987, pp. 57--66.
- Sulikashvili, R. S., Stationary motions of bodies that admit groups of symmetries of regular polyhedra in a Newtonian force field, J. Appl. Math. Mech. (PMM), 1989, v. 53, No. 4, pp. 452--456.
- Sulikashvili, R. S., On stationary motions of Plato's bodies in a gravitational field, Teor. Primen. Meh., 1989, No. 15, 119--125.
- Burov, A.A. and Sulikashvili, R.S., On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry, Prepublication de la laboratoire de mathématiques appliquées Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Avril 1993, No.25, 8 pp.
- Sarychev, V.A., Equilibria of a double pendulum in a circular orbit, Acta Astronautica, Vol.44, No.1, 1999, 63-65.

# Литература

---

- Guerman, A. D., Equilibria of multibody chain in orbit plane, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2003, v. 26, No. 6, pp. 942-948.
- Guerman, A. D., Spatial equilibria of multibody chain in a circular orbit, Acta Astronautica, Vol. 58, No.1, 2006, pp. 1-14.
- Guzman, J. and Schiff, C., A preliminary study for a tetrahedron formation: quality factors and visualization, AIAA Paper 2002-4637, Aug. 2002.
- Clemente, D. C. and Atkins, E. M., Optimization of a tetrahedral satellite formation, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 42, No. 4, 2005, pp. 699-710.
- Laakso, H., Escoubet, P., Opgenoorth, H., Pallaschke, S., and Hapgood, M., Cluster - A microscope and a telescope for studying space plasmas, ESA Bulletin, Vol. 121, 2005, pp. 11-17.
- Bainum, P. and Tan, Z., Tethered Satellite Constellations in Auroral Observation Missions, AIAA Paper 2002-4640, Aug. 2006.
- Capo-Lugo, P. A., and Bainum, P. M., Digital LQR Control Scheme to Maintain the Separation Distance of the NASA Benchmark Tetrahedron Constellation, AIAA Paper 2006-6014, Aug. 2006.
- Misra, A. K. and Modi, V. J., Three-dimensional dynamics and control of tether-connected n-body systems, Acta Astronautica, Vol. 26, No.2, 1992, pp. 77-84.
- Williams, T. and Moore, K., Dynamics of tethered satellite formations, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Antonio, Texas, 2002, Paper AAS-02-198.



# Vertices and reactions

Solutions:

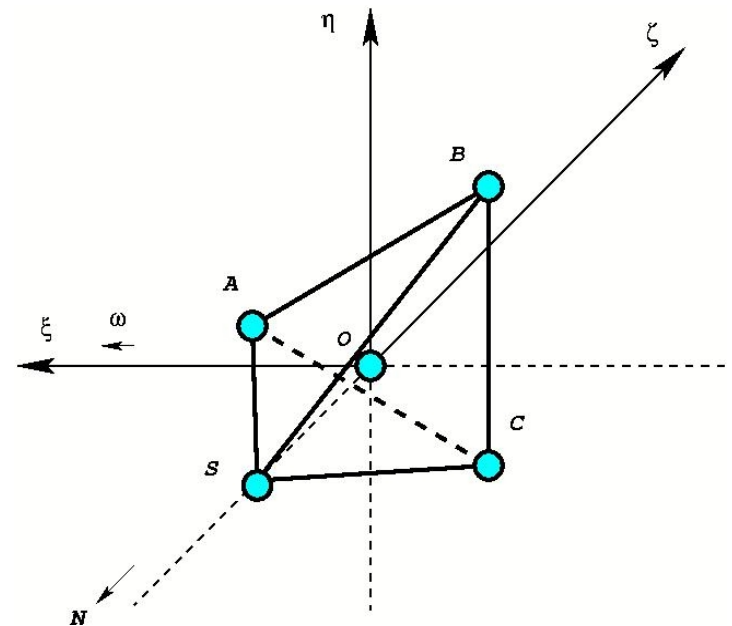
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}\ell \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{12}\ell \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\ell \\ \frac{1}{2}\ell \\ \frac{\sqrt{6}}{12}\ell \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\ell \\ -\frac{1}{2}\ell \\ \frac{\sqrt{6}}{12}\ell \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}\ell \end{pmatrix}$$

Reactions:

stretched  $\lambda_{as} = \lambda_{bs} = \lambda_{cs} = \frac{(2\sqrt{6} + 3\ell)\sqrt{6}}{16}$

compressed  $\lambda_{ab} = \lambda_{ac} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}\ell}{48}$

$$\lambda_{bc} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{6}\ell}{48}$$



# Vertices and reactions

Solutions:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ell \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\ell \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\ell \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\ell \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\ell \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\ell \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\ell \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\ell \end{pmatrix}$$

Reactions:

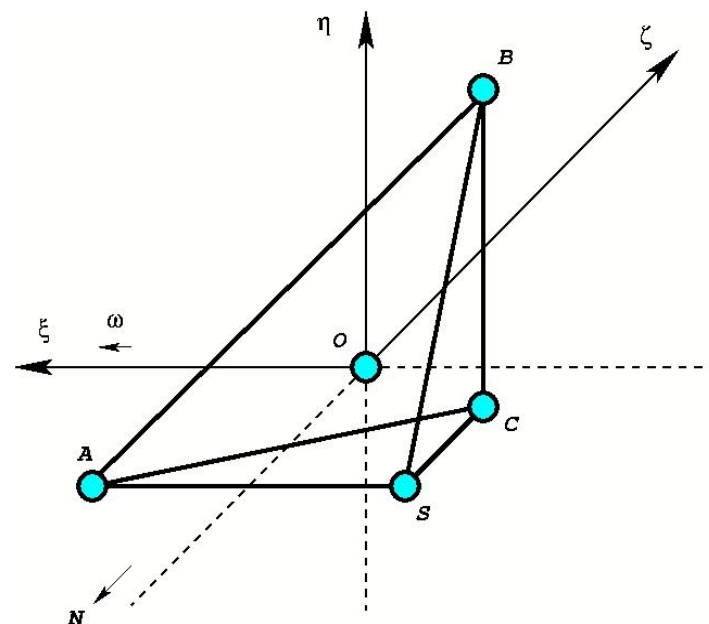
stretched

$$\lambda_{ab} = \lambda_{ac} = \lambda_{cs} = \lambda_{bs} = \frac{3}{4}$$

compressed

$$\lambda_{as} = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{2}\ell}{8}$$

$$\lambda_{bc} = -\frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{2}\ell}{8}$$



# Vertices and reactions

Solutions:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}\ell \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{12}\ell \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\ell \\ \frac{1}{2}\ell \\ -\frac{\sqrt{6}}{12}\ell \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\ell \\ -\frac{1}{2}\ell \\ -\frac{\sqrt{6}}{12}\ell \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{4}\ell \end{pmatrix}$$

Reactions:

stretched

$$\lambda_{as} = \lambda_{bs} = \lambda_{cs} = -\frac{(-2\sqrt{6} + 3\ell)\sqrt{6}}{16}$$

compressed

$$\lambda_{ab} = \lambda_{ac} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}\ell}{48}$$

$$\lambda_{bc} = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}\ell}{48}$$

