

И. С. Григорьев,  
М. П. Заплетин

*МГУ им. М. В. Ломоносова*

О задаче  
глобальной оптимизации  
инспектирования астероидов  
космическим аппаратом  
в окрестности орбиты Земли

## Постановка задачи

Дифференциальные уравнения управляемого движения центра масс КА в декартовой эклиптической системе координат:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, & \dot{z} &= v_z, & \dot{m} &= -T/c, \\ \dot{v}_x &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{T_x}{m} = F_x, & \dot{v}_y &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{T_y}{m} = F_y, & \dot{v}_z &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{T_z}{m} = F_z, \\ T &\equiv \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} \leq T_{\max} = 0.135 \text{ Н.} \\ c &= P_{\text{уд}} \cdot g_E, & P_{\text{уд}} &= 3000 \text{ с}, & g_E &= 9.80665 \text{ м/с}.\end{aligned}$$

Старт с Земли:

$$\begin{aligned}m(t_s) &= 1500 \text{ кг}, & x(t_s) - x^E(t_s) &= 0, & y(t_s) - y^E(t_s) &= 0, & z(t_s) - z^E(t_s) &= 0, \\ (v_x(t_s) - v_x^E(t_s))^2 &+ (v_y(t_s) - v_y^E(t_s))^2 &+ (v_z(t_s) - v_z^E(t_s))^2 &\leq (4 \text{ км/с})^2, \\ 57023.0 \text{ MJD} &< t_s &< 61041.0 \text{ MJD};\end{aligned}$$

Пролет астероида  $k = \overline{1, K-1}$ :

$$t_{k-} - t_{k+} = 0, \quad m(t_{k-}) - m(t_{k+}) = 0,$$

$$x(t_{k-}) - x^{Ai}(t_{k-}) = 0, \quad y(t_{k-}) - y^{Ai}(t_{k-}) = 0, \quad z(t_{k-}) - z^{Ai}(t_{k-}) = 0,$$

$$x(t_{k+}) - x^{Ai}(t_{k+}) = 0, \quad y(t_{k+}) - y^{Ai}(t_{k+}) = 0, \quad z(t_{k+}) - z^{Ai}(t_{k+}) = 0,$$

$$v_x(t_{k-}) - v_x(t_{k+}) = 0, \quad v_y(t_{k-}) - v_y(t_{k+}) = 0, \quad v_z(t_{k-}) - v_z(t_{k+}) = 0.$$

Окончание перелета прилет на последний астероид:

$$x(t_f) - x^{AK}(t_f) = 0, \quad y(t_f) - y^{AK}(t_f) = 0, \quad z(t_f) - z^{AK}(t_f) = 0,$$

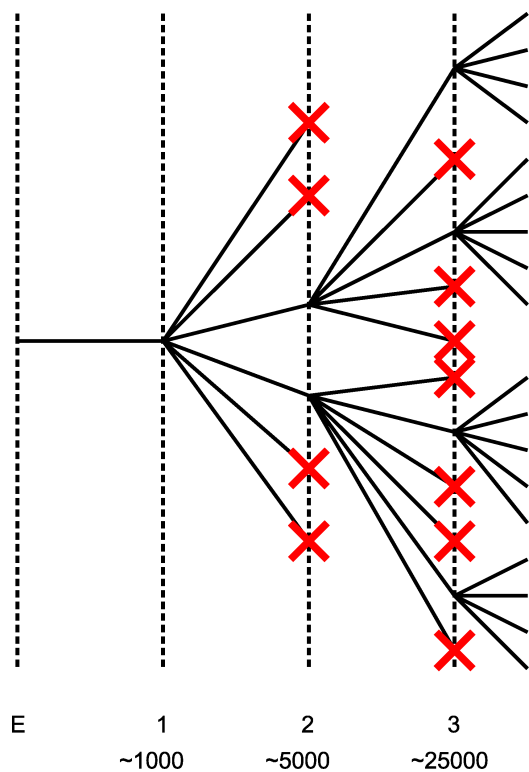
$$v_x(t_f) - v_x^{AK}(t_f) = 0, \quad v_y(t_f) - v_y^{AK}(t_f) = 0, \quad v_z(t_f) - v_z^{AK}(t_f) = 0,$$

Общая продолжительность перелета ограничена:  $t_f - t_s < t_{\max} = 3652.5 ED$ .

Конечная масса ограничена:  $m(t_f) \geq 500$  кг.

Первый функционал  $K \rightarrow \max$ .

Второй функционал  $m(t_f) \rightarrow \max$ .



### Куст перелета.

Под кустом перелета понимается совокупность возможных траекторий, характеризуемых моментом старта с Земли, последовательностью астероидов и временами пролета этих астероидов:

$$\{\text{Земля, } t_s\} \rightarrow \{\text{1-ый астероид, } t_1\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \{\text{2-ой астероида, } t_2\} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow \{\text{к-ый астероид, } t_k\} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow \{\text{К-ый астероид, } t_K\}.$$

Построение куста осуществляется в несколько этапов. Отдельно выделим: первый этап, промежуточные этапы, заключительный этап.

## Первый этап построения графа.

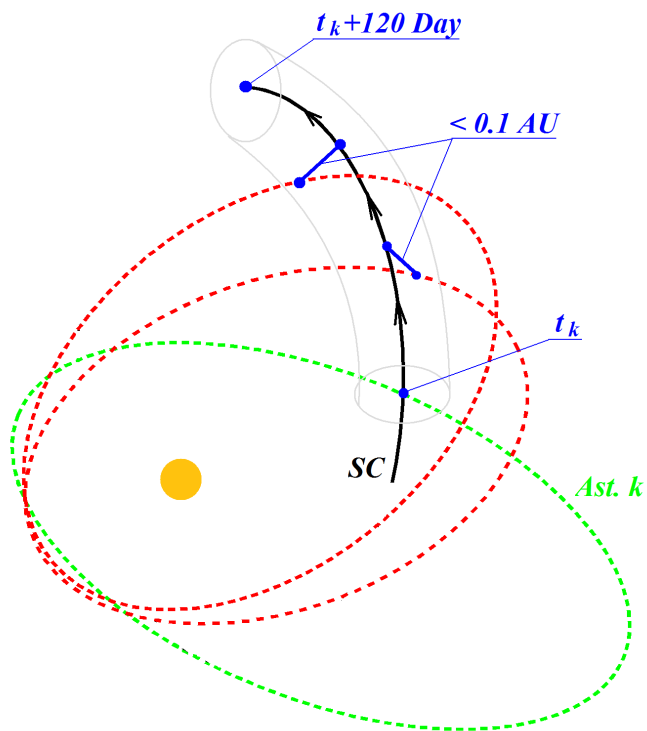
На первом этапе решались задачи Ламберта перелета от Земли к астероидам. Момент старта от Земли выбирался с шагом 10 дней из допустимого диапазона

$$57023.0 \text{ MJD} < t_s < 61041.0 \text{ MJD}.$$

Продолжительность перелета выбиралась от 20 до 60 дней с шагом 5 дней. Отбирались траектории минимальной продолжительности, на которых начальный импульс у Земли не превышал 4.1 км/с.

На первом этапе отобрано около тысячи траекторий.

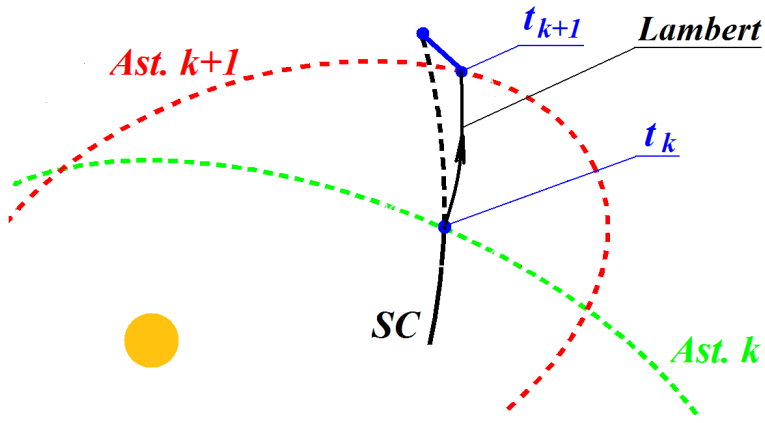
## Промежуточные этапы.



Предположение: астероиды расположены равномерно и среднее время перелета от астероида к астероиду составляет примерно 90 дней (40 перелетов за 10 лет).

Поэтому: траектория подлета к  $k$ -му астероиду продолжалась далее заданное время (примерно 120 дней).

На этом интервале осуществлялся поиск “близких” астероидов (расстояние между КА и астероидом меньше 0.1 AU) и моментов сближения.



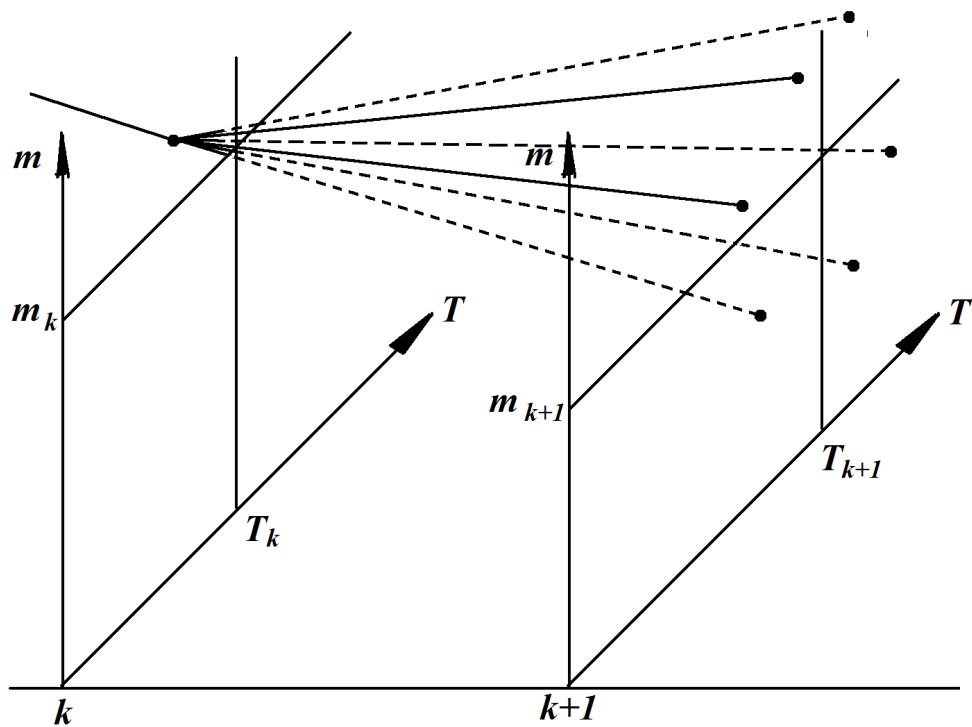
Решались задачи Ламберта перелета от  $k$ -ого астероида к очередному астероиду. Учитывалась величина импульса у  $k$ -ого астероида. Среднее увеличение общего числа ветвей в 5 раз.

Для каждой ветви (заданного упорядоченного набора астероидов) проводилась оптимизация времен:

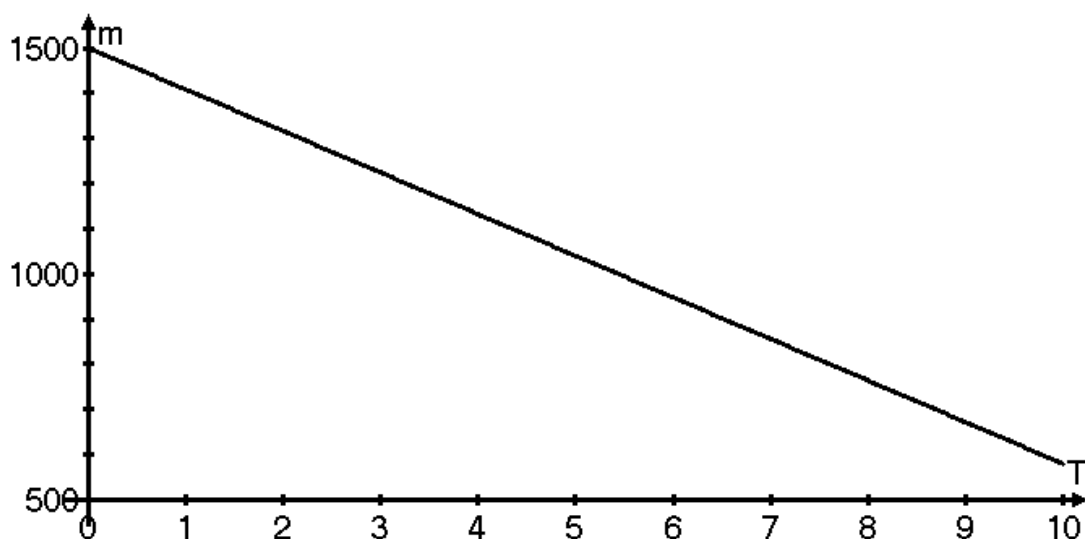
$$(\Delta V_E + \Delta V_1 + \dots + \Delta V_k) \rightarrow \min_{t_E, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}},$$

где  $\Delta V_0 = \max(0, |\vec{v}(t_0) - \vec{v}_E(t_0)| - 4 \text{ km/s})$ ,  $\Delta V_k = |\vec{v}(t_{k+}) - \vec{v}(t_{k-})|$ .

Проводился выбор перспективных ветвей (оставалось 1000 – 1200 различных).



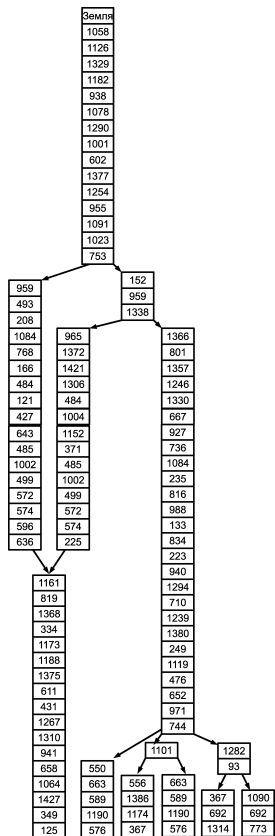




Выбор величины  $m_k$  в зависимости от  $T_k$ .

Ограничение продолжительности перелета для каждого слоя выбиралось превышающим наименьшую продолжительность перелета на слое примерно на 300–350 дней, ограничение массы определялось соотношением:

$$m_k = -\frac{920 \text{ кг}}{10 \text{ лет}} T_k.$$



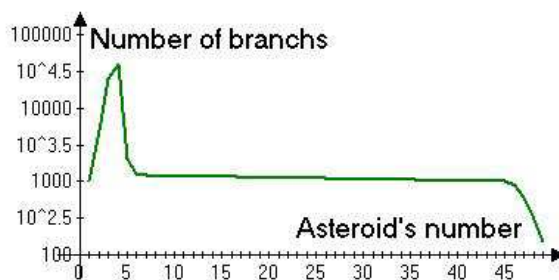
**Заключительный этап** отличался от промежуточных этапов учетом импульса прилета на последний астероид при оптимизации:

$$(\Delta V_E + \Delta V_1 + \dots + \Delta V_k + \dots + \Delta V_K) \rightarrow \min_{t_E, t_1, \dots, t_k, \dots, t_K},$$

где  $\Delta V_K = |\vec{v}(t_K) - \vec{v}_A^K(t_K)|$ .

**Итак:**

на основе анализа задач Ламберта получены “перспективные” импульсные траектории — отобрано семь траекторий.



### Задача в импульсной постановке.

Дифференциальные уравнения пассивного движения центра масс КА в декартовой эклиптической системе координат:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, & \dot{z} &= v_z, & \dot{m} &= 0, \\ \dot{v}_x &= -\frac{\mu x}{r^3}, & \dot{v}_y &= -\frac{\mu y}{r^3}, & \dot{v}_z &= -\frac{\mu z}{r^3},\end{aligned}$$

Для построения траекторий перелета КА с ограниченной тягой был отобран десяток траекторий. Оказалось, что на отобранных траекториях ограничение

$$(v_x(t_s) - v_x^E(t_s))^2 + (v_y(t_s) - v_y^E(t_s))^2 + (v_z(t_s) - v_z^E(t_s))^2 \leq (4 \text{ км/с})^2$$

выполнялось как строгое неравенство. Условия отлета КА от Земли приняли вид:

$$\begin{aligned}m(t_s) &= 1500 \text{ кг}, & x(t_s) - x^E(t_s) &= 0, & y(t_s) - y^E(t_s) &= 0, & z(t_s) - z^E(t_s) &= 0, \\ (v_x(t_s) - v_x^E(t_s))^2 &+ (v_y(t_s) - v_y^E(t_s))^2 &+ (v_z(t_s) - v_z^E(t_s))^2 &< (4 \text{ км/с})^2, \\ 57023.0 \text{ MJD} &< t_s &< 61041.0 \text{ MJD};\end{aligned}$$

Условия импульсного пролета астероида  $n = \overline{1, N - 1}$ :

$$\begin{aligned} x(t_{k-}) - x^{Ak}(t_{k-}) &= 0, & y(t_{k-}) - y^{Ak}(t_{k-}) &= 0, & z(t_{k-}) - z^{Ak}(t_{k-}) &= 0, \\ x(t_{k+}) - x^{Ak}(t_{k+}) &= 0, & y(t_{k+}) - y^{Ak}(t_{k+}) &= 0, & z(t_{k+}) - z^{Ak}(t_{k+}) &= 0, \\ \Delta V_k &= \sqrt{(v_x(t_{k+}) - v_x(t_{k-}))^2 + (v_y(t_{k+}) - v_y(t_{k-}))^2 + (v_z(t_{k+}) - v_z(t_{k-}))^2} \\ & m(t_{k+}) - m(t_{k-}) \exp(-\Delta V_k/c) = 0, & t_{k+} - t_{k-} &= 0; \end{aligned}$$

Импульсный прилет на последний астероид:

$$\begin{aligned} x(t_f) - x^{AK}(t_f) &= 0, & y(t_f) - y^{AK}(t_f) &= 0, & z(t_f) - z^{AK}(t_f) &= 0, \\ \Delta V_f &= \sqrt{(v_x^{AK}(t_f) - v_x(t_f))^2 + (v_y^{AK}(t_f) - v_y(t_f))^2 + (v_z^{AK}(t_f) - v_z(t_f))^2} \end{aligned}$$

Общая продолжительность перелета ограничена:  $t_f - t_s < t_{\max} = 3652.5 ED$ .  
Максимизируется конечная масса  $m(t_f) \exp(-\Delta V_f/c) \rightarrow \max$ .

### Условия оптимальности импульсного перелета.

Сопряженная система уравнений:

$$\dot{p}_j = -\partial H / \partial j, \quad j = x, y, z, v_x, v_y, v_z, m;$$

$$H \equiv p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - p_{vx} \frac{\mu x}{r^3} - p_{vy} \frac{\mu y}{r^3} - p_{vz} \frac{\mu z}{r^3}.$$

Следствия условий трансверсальности  
отлет КА от Земли:

$$p_j(t_s) = \lambda_j^s \quad j = x, y, z, m, \quad p_j(t_s) = 0 \quad j = v_x, v_y, v_z;$$

пролет астероида  $k = \overline{1, K - 1}$ :

$$p_j(t_{k-}) = -\lambda_j^{k-}, \quad p_j(t_{k+}) = \lambda_j^{k+} \quad j = x, y, z,$$

$$p_m(t_{k+}) = p_m(t_{k-}) \exp(\Delta V_k / c), \quad p_j(t_{k-}) = p_j(t_{k+}) = \Delta j^k / \Delta V_k \quad j = v_x, v_y, v_z;$$

прилет на последний астероид:

$$p_j(t_f) = -\lambda_j^f, \quad j = x, y, z, \quad p_m(t_f) = -\lambda_0 \exp(-\Delta V_f / c),$$

$$p_j(t_f) = \Delta j^f / \Delta V^f \quad j = v_x, v_y, v_z.$$

Следствия условий стационарности

(ограничения на момент старта и продолжительность перелета неактивны)  
отлет КА от Земли:

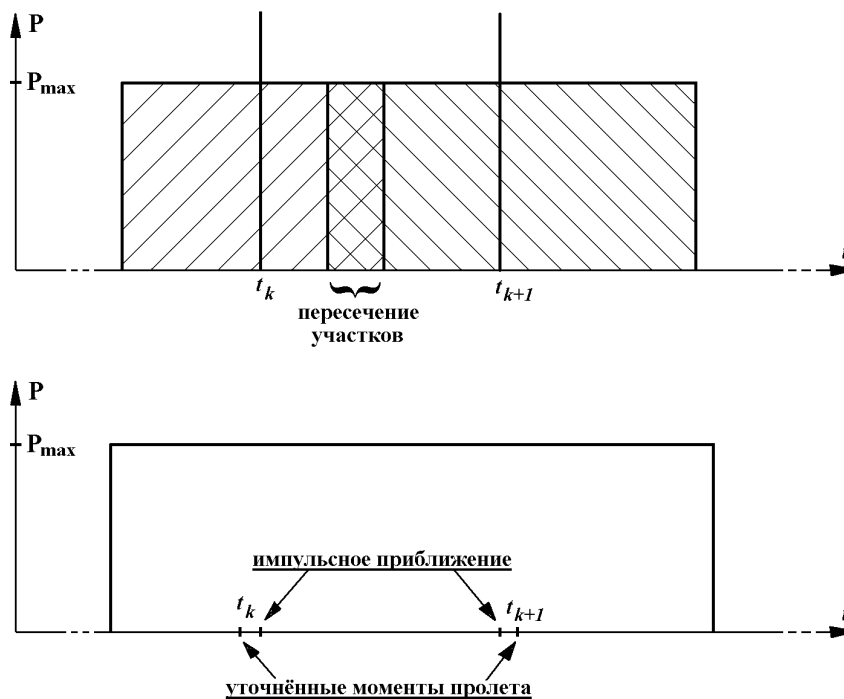
$$p_x(t_s)(v_x(t_s) - v_x^E(t_s)) + p_y(t_s)(v_y(t_s) - v_y^E(t_s)) + p_z(t_s)(v_z(t_s) - v_z^E(t_s)) = 0;$$

пролет астероида  $n = \overline{1, N - 1}$ :

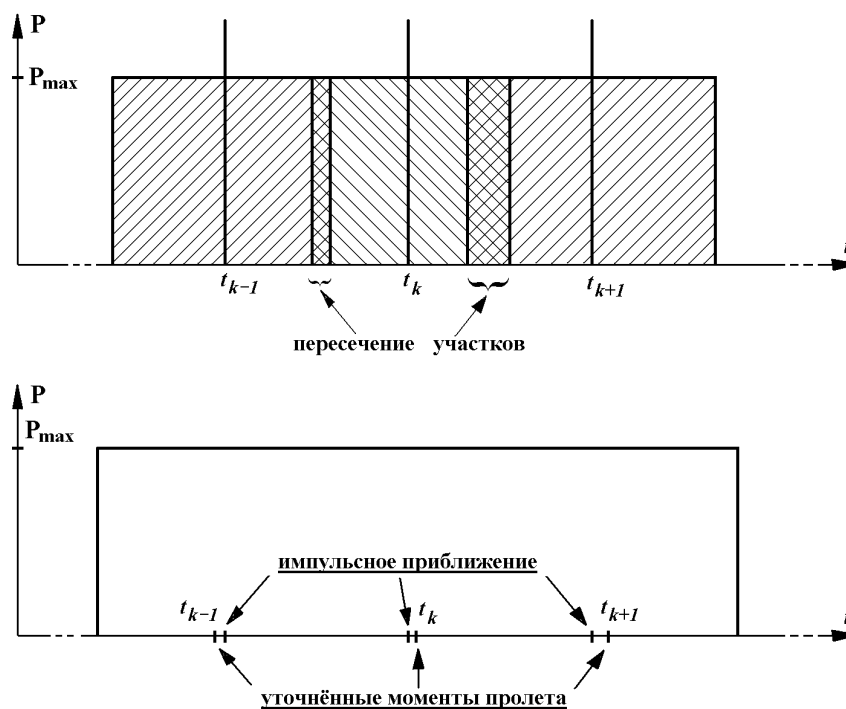
$$\begin{aligned} p_x(t_{k-})(v_x(t_{k-}) - v_x^{Ak}(t_{k-})) + p_y(t_{k-})(v_y(t_{k-}) - v_y^{Ak}(t_{k-})) + p_z(t_{k-})(v_z(t_{k-}) - v_z^{Ak}(t_{k-})) = \\ = p_x(t_{k+})(v_x(t_{k+}) - v_x^{Ak}(t_{k+})) + p_y(t_{k+})(v_y(t_{k+}) - v_y^{Ak}(t_{k+})) + p_z(t_{k+})(v_z(t_{k+}) - v_z^{Ak}(t_{k+})); \end{aligned}$$

прилет на последний астероид:

$$p_x(t_f)(v_x(t_f) - v_x^{AK}(t_f)) + p_y(t_f)(v_y(t_f) - v_y^{AK}(t_f)) + p_z(t_f)(v_z(t_f) - v_z^{AK}(t_f)) = 0.$$

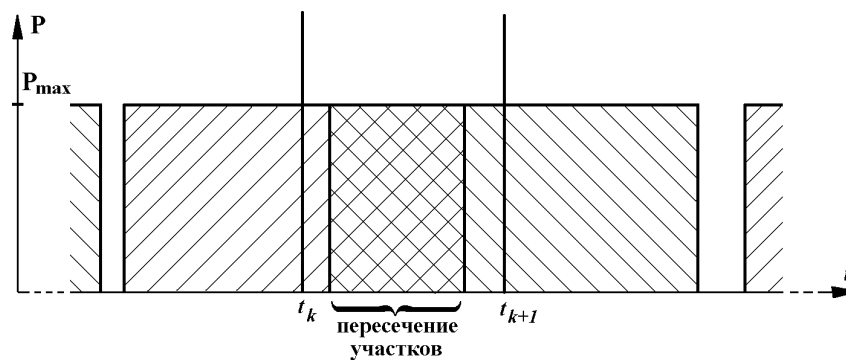


Перекрытие двух активных участков, соответствующих импульсным воздействиям при пролете астероидов, и соответствующее решение при ограниченной величине тяги.



Перекрытие трех активных участков, соответствующих импульсным воздействиям при пролете астероидов, и соответствующее решение при ограниченной величине тяги.





Перекрытие двух активных участков, соответствующих импульсным воздействиям при пролете астероидов, не позволяющее построить решение при ограниченной величине тяги.

### Задача минимизации квадратичного функционала.

Цель рассмотрения вспомогательной задачи является получение гладкого управления и относительно легко решаемой краевой задачи.

$$\int_{t_s}^{t_f} \frac{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}{m^2} dt \rightarrow \min,$$

Представленная задача представляет собой другую формализацию хорошо известной задачи оптимизации интеграла квадрата ускорения.

### Краевая задача

Система дифференциальных уравнений краевой задачи:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, & \dot{z} &= v_z, & \dot{m} &= -T/c, & T &= \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}, \\ \dot{v}_x &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{T_x}{m} = F_x, & \dot{v}_y &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{T_y}{m} = F_y, & \dot{v}_z &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{T_z}{m} = F_z, \\ \dot{p}_x &= +\mu \left( \frac{p_{vx}}{r^3} - 3x \frac{p_{vx}x + p_{vy}y + p_{vz}z}{r^5} \right), \\ \dot{p}_y &= +\mu \left( \frac{p_{vy}}{r^3} - 3y \frac{p_{vx}x + p_{vy}y + p_{vz}z}{r^5} \right), \\ \dot{p}_z &= +\mu \left( \frac{p_{vz}}{r^3} - 3z \frac{p_{vx}x + p_{vy}y + p_{vz}z}{r^5} \right), \\ \dot{p}_{vx} &= -p_x, & \dot{p}_{vy} &= -p_y, & \dot{p}_{vz} &= -p_z, \\ \dot{p}_m &= \frac{p_{vx}T_x + p_{vy}T_y + p_{vz}T_z}{m^2} - 2\lambda_0 \frac{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}{m^3}; \end{aligned}$$

Отметим, что  $p_m \equiv 0$ .

Условия оптимальности:

$$T_x = m \frac{1}{2\lambda_0} p_{vx}, \quad T_y = m \frac{1}{2\lambda_0} p_{vy}, \quad T_z = m \frac{1}{2\lambda_0} p_{vz}.$$

При выборе условия нормировки  $\frac{1}{2\lambda_0} = T_{\max}/1500$  kg:

$$T_x = T_{\max} \frac{m}{m_0} p_{vx}, \quad T_y = T_{\max} \frac{m}{m_0} p_{vy}, \quad T_z = T_{\max} \frac{m}{m_0} p_{vz}.$$

Условия отлета КА от Земли:

$$m(t_s) = 1500 \text{ kg}, \quad x(t_s) - x^E(t_s) = 0, \quad y(t_s) - y^E(t_s) = 0, \quad z(t_s) - z^E(t_s) = 0,$$

$$(v_x(t_s) - v_x^E(t_s))^2 + (v_y(t_s) - v_y^E(t_s))^2 + (v_z(t_s) - v_z^E(t_s))^2 \leq (4 \text{ km/s})^2,$$

$$57023.0 \text{ MJD} \leq t_s \leq 61041.0 \text{ MJD}.$$

$$p_j(t_s) = \lambda_j^s \quad j = x, y, z, m, \quad p_j(t_s) = 2\lambda_V^s \Delta j \quad j = v_x, v_y, v_z;$$

$$H(t_s) = -\partial l / \partial t_s.$$

Пролет астероида  $k = \overline{1, K-1}$ :

$$t_{k-} - t_{k+} = 0, \quad m(t_{k-}) - m(t_{k+}) = 0,$$

$$x(t_{k-}) - x^{Ak}(t_{k-}) = 0, \quad y(t_{k-}) - y^{Ak}(t_{k-}) = 0, \quad z(t_{k-}) - z^{Ak}(t_{k-}) = 0,$$

$$x(t_{k+}) - x^{Ak}(t_{k+}) = 0, \quad y(t_{k+}) - y^{Ak}(t_{k+}) = 0, \quad z(t_{k+}) - z^{Ak}(t_{k+}) = 0,$$

$$v_x(t_{k-}) - v_x(t_{k+}) = 0, \quad v_y(t_{k-}) - v_y(t_{k+}) = 0, \quad v_z(t_{k-}) - v_z(t_{k+}) = 0.$$

$$p_j(t_{k-}) = -\lambda_j^{k-}, \quad p_j(t_{k+}) = \lambda_j^{k+} \quad j = x, y, z, \quad p_j(t_{k-}) = p_j(t_{k+}) \quad j = m, v_x, v_y, v_z.$$

Следствия условий стационарности при пролете астероида  $k = \overline{1, K-1}$ :

$$\begin{aligned} p_x(t_{k-})(v_x(t_{k-}) - v_x^{Ak}(t_{k-})) + p_y(t_{k-})(v_y(t_{k-}) - v_y^{Ak}(t_{k-})) + p_z(t_{k-})(v_z(t_{k-}) - v_z^{Ak}(t_{k-})) = \\ = p_x(t_{k+})(v_x(t_{k+}) - v_x^{Ak}(t_{k+})) + p_y(t_{k+})(v_y(t_{k+}) - v_y^{Ak}(t_{k+})) + p_z(t_{k+})(v_z(t_{k+}) - v_z^{Ak}(t_{k+})). \end{aligned}$$

Окончание перелета прилет на последний астероид:

$$x(t_f) - x^{AK}(t_f) = 0, \quad y(t_f) - y^{AK}(t_f) = 0, \quad z(t_f) - z^{AK}(t_f) = 0,$$

$$v_x(t_f) - v_x^{AK}(t_f) = 0, \quad v_y(t_f) - v_y^{AK}(t_f) = 0, \quad v_z(t_f) - v_z^{AK}(t_f) = 0,$$

$$p_j(t_f) = -\lambda_j^f, \quad j = x, y, z, v_x, v_y, v_z; \quad p_m(t_f) = 0;$$

Условие стационарности  $H(t_s) = \partial l / \partial t_f$ .

Ограничение  $t_f - t_s \leq t_{\max} = 3652.5 ED$  выполняется как равенство.

### Метод решения краевой задачи

Краевая задача решалась численно методом стрельбы с числом подбираемых неизвестных параметров пристрелки до 500. Система нелинейных уравнений — модифицированным методом Ньютона (модификация Исаева–Сонина с использованием в условии сходимости нормировки Федоренко). Задачи Коши на каждом из участков решались методом Дорамана–Принса 8(7).

### Изменение закона выбора управления.

Полученное решение оказалось недопустимым из-за нарушения ограничения на величину управления

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} = T_{\max} \frac{m}{m_0} \rho \leq T_{\max} = 0.135 \text{ N}.$$

Поэтому закон управления, соответствующий минимизации квадратичного функционала

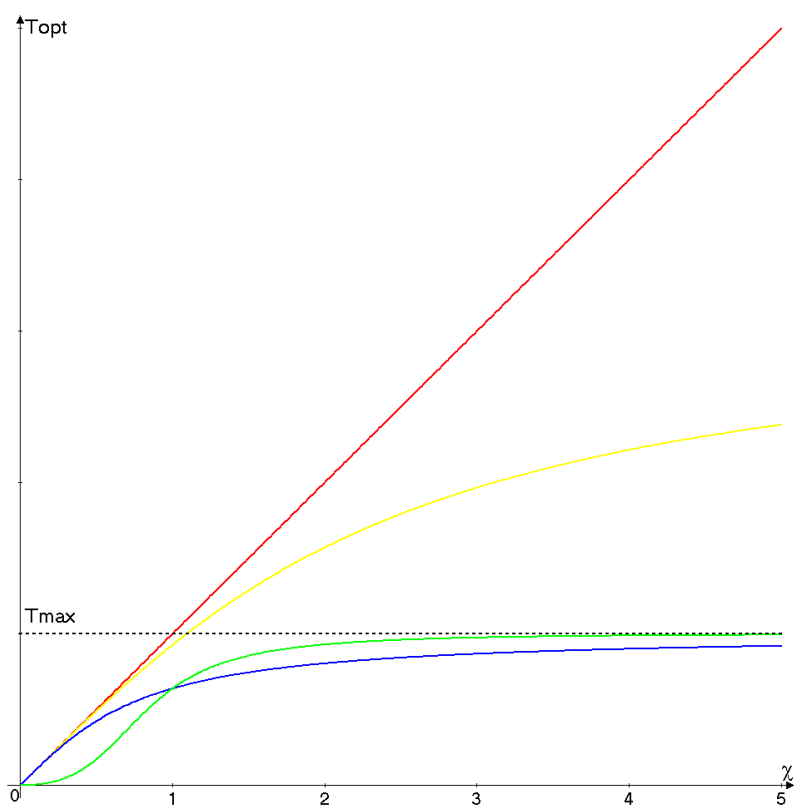
$$e_x = \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad e_y = \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad e_z = \frac{p_{vz}}{\rho}, \quad \chi = \rho \frac{m}{m_0}, \quad T = T_{\max} \cdot \chi,$$

$$T_x = T e_x, \quad T_y = T e_y, \quad T_z = T e_z$$

был изменен на закон:  $T = T_{\max} \cdot \gamma \cdot \text{arctg}(\chi/\gamma)$ .

Переход осуществлялся с использованием метода продолжения решения по параметру  $\gamma$  с  $\gamma = 2$  до  $\gamma = 2/\pi$  (соответствующего гарантированному выполнению ограничения  $T \leq T_{\max}$ ). В процессе перехода был осуществлен отсев 4 наиболее напряженных маневра у астероидов.

Затем полученный закон управления был изменен на закон  $T = T_{\max} \cdot \gamma \cdot \text{arctg}(\chi^s/\gamma)$  с использованием метода продолжения решения по параметру  $s$  с  $s = 1$  до  $s = 2.5$ .



красный — закон управления

$$T = T_{max} \cdot \chi$$

(квадратичный функционал),

желтый — закон управления

$$T = T_{max} \cdot \gamma \cdot \text{arctg}(\chi/\gamma)$$

при  $\gamma = 2$ ,

синий — закон управления

$$T = T_{max} \cdot \gamma \cdot \text{arctg}(\chi/\gamma)$$

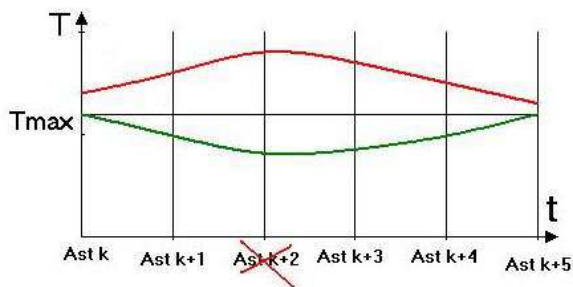
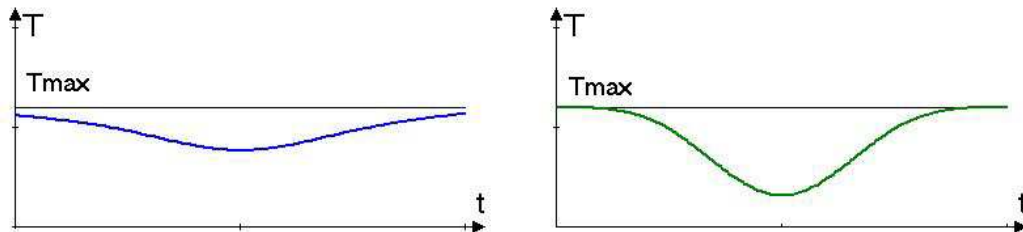
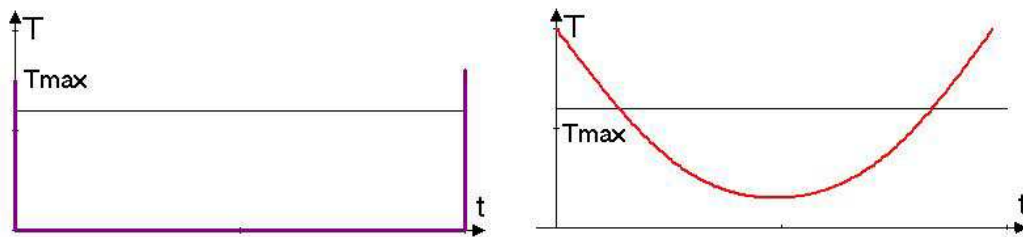
при  $\gamma = 2/\pi$ ,

зеленый — закон управления

$$T = T_{max} \cdot \gamma \cdot \text{arctg}(\chi^{5/2}/\gamma)$$

при  $\gamma = 2/\pi$ .





## Post-competition results

Рассмотрим задачу оптимизации перелета

$$\int_{t_s}^{t_f} -\ln \left( \cos \left( \frac{Tm_0}{mT_{\max}\gamma} \right) \right) dt \rightarrow \min \quad \text{при} \quad 0 \leq \frac{T}{m} \leq \frac{T_{\max}}{m_0} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{2}{\pi},$$

$T_{\max}/m_0$  — некоторое максимально допустимое значение ускорения.

Тогда  $H = H_0 + H_1(T_x, T_y, T_z)$ ,

$$H_1(T_x, T_y, T_z) = \frac{T_x p_{vx} + T_y p_{vy} + T_z p_{vz}}{m} - p_m \frac{T}{c} + \lambda_0 \ln \left( \cos \left( \frac{Tm_0}{mT_{\max}\gamma} \right) \right),$$

С учетом  $p_m \equiv 0$ ,

$$\partial H / \partial T = \partial H_1 / \partial T = 0 :$$

$$\frac{\rho}{m} - \frac{\lambda_0 m_0}{T_{\max} \gamma m} \operatorname{tg} \left( T \frac{m_0}{T_{\max} \gamma m} \right) = 0, \quad \text{или} \quad T = T_{\max} \gamma \frac{m}{m_0} \operatorname{arctg} \frac{\rho T_{\max} \gamma}{\lambda_0 m_0}.$$

Выбор множителя Лагранжа при функционале  $\lambda_0 = T_{\max} \gamma^2 / m_0$  приводит к

$$T = T_{\max} \gamma \frac{m}{m_0} \operatorname{arctg} \frac{\rho}{\gamma}$$

— то есть к гладкому ограничению ускорения КА в требуемом диапазоне.

Свойства функционала:

- 1) функция под интегралом строго монотонно возрастает,
- 2) при  $T = 0$  она равна нулю,
- 3) при  $T/m \rightarrow T_{\max}/m_0$  она неограниченно возрастает,
- 4) при  $0 \leq T/m < T_{\max}/m_0$  функция имеет гладкую производную, стремящуюся при  $T/m \rightarrow T_{\max}/m_0$  к бесконечности,
- 5) при малых значениях  $(Tm_0)/(T_{\max}m)$  подынтегральная функция близка к квадратичной, то есть при больших значениях  $T_{\max}$  решение задачи минимизации квадратичного функционала может использоваться в качестве хорошего начального приближения.

